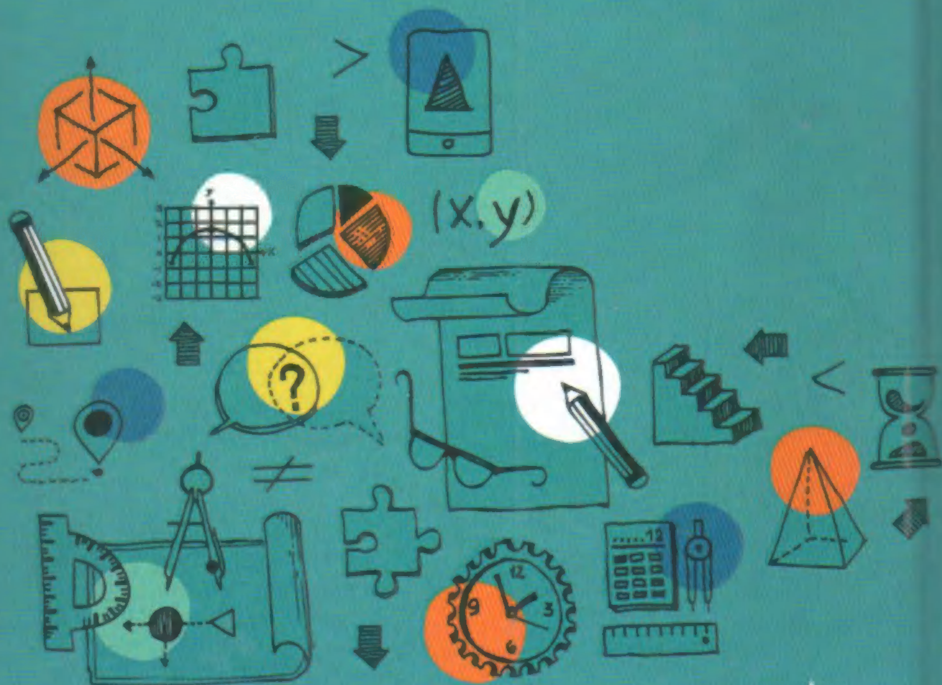
پول
گلندینینگ

بیرکاری لە چەند خولەکێک

ڕوونکردنەوەی ٢٠٠ کلیلەوشە بە کورتی



وەرگێڕان و ئامادەکردنی:
ئوسامە تحسین پیربال



بیرکاری لە
چەند خولەکێک

ڕوونکردنەوەی ٢٠٠ کلیلەوشە بە کورتی

بیرکاری لە چەند خولەکێک

ڕوونکردنەوەی ٢٠٠ کلیلەوشە بە کورتی

پول گلندینینگ

وەرگێڕان و ئامادەکردنی:
ئوسامە تحسین پیربال

پێناسی کتێب

- ناوی کتێب، بیرکاری لە چەند خولەکێك
- بابەت، لێکۆڵینەوەی زانستی
- نووسەر، پول گلندینینگ
- وەرگێڕان و ئامادەکردنی ، ئوسامە تحسین پیربال
- دیزاین، ناوەندی ڕێنوێن
- ژمارەی چاپ، یەکەم
- تیراژ، ١٠٠٠
- نرخ، ٨٠٠٠ دینار

لە بەڕێوەبەرایەتیی گشتیی کتێبخانە گشتییەکان
ژمارە سپاردنی (١٨٤٤)ی ساڵی ٢٠١٩ی پێ دراوە.



ناوەندی ڕێنوێن


0751 140 8868 - 0750 126 9689


hakem1423@yahoo.com
renwen2009@yahoo.com


سلێمانی - بازاڕی ئاوباریك - نهۆمی یەکەم
بەرامبەر کاسۆمۆل - دوکانی ژمارە (٦٦)

پێشکەش بە (دایک) و (باوکم)،

بە تەواوی ئەندامانی خێزانەکەمان، کە بچوکترینیان

ناوی خاتوو (ڕوناس)ە.

سوپاس و پێزانین:

سوپاس بۆ هەردوو مامۆستای زۆر بەڕێز (شێرکۆ ڕەشید قادر) و (ڕێبین قادر محمد) کە من لەوانەوە فێری نووسین و نووسینی بیرکاری بووم. کە هەمیشە هاندەرم بوونە، ئەگەرچی تا هەنووکە کەسیانم ڕوو بە ڕوو نەبینیووە.

ڕێز و سوپاس بۆ ئەو مامۆستا و هاوڕێی خۆشەویستانەی دەورم کە هەمیشە پاڵپشت و یارمەتیدەرم بوونە بۆ هەر شتێک، ئەوانیش (م. ئەحمەد کەریم و م. کارزان کەریم) و هەردوو مامۆستای زمانی ئینگلیزی (م. عبدالباسیت حوسێن)، وەرگێڕ و نووسەری سەرکەتوو (م. ئەبوبەکر ئەحمەد خدر)

سوپاس تایبەتی هاوڕێی و مامۆستای زۆر خۆشەویست (م. ئەحمەد شێخانی) دەکەم کە ئەرکی هەڵەچنی ئەو پەرتوکەی گرتە ئەستۆ، ئەو هەوڵ و ماندووبونەی زۆر بەرزدەنرخێنم.

سوپاسی بێ سنوورم بۆ تەواوی مامۆستاکانی قوناغی خوێندنم، هەموو ئەوانەی ڕۆژێک لە ڕۆژان شتێکان فێرکردوومە و فێربوومە لێیان.

له خۆمم پرسی بیرکاری چییه؟ له وەڵامدا وتم : به بیرکردنەوه و کارکردن تێدا، دەدرەوشێتەوه.

"علی مغدید عبدالله"[1]

[1](علی مغدید عبدالله) قوتابیم بوو له پۆلی 10ی زانستی. له وەڵامی پرسیارێک: بیرکاری چییه؟ یەکێک بوو لەو قوتابییانەی که وەڵامەکەی به لامەوه زۆر جوان بوو. بۆیه له جیاتی ئەوەی وتەی بیرکاریزانێک دانێم، به پێویستم زانی، که وتەکەی ئەو بەسەر هەموو وتەیەک بخەم! له بلۆگی "بیرکاری بۆ کورد" دەتوانن خوێنەری وتەی هەموو قوتابییەکانم بن.

ناوەڕۆک لاپەڕە

پێشەکی وەرگێڕ- ئامادەکار

به ناوی خودای بەخشندە و میهرەبان. درود و سەلام بۆ سەر گیانی پاکی پێشەوامان- محمد(ﷺ) ، نووری دیدە، هێزی ڕۆح و چرای ڕۆژی دواییمان.

نزیکەی گەلاڕێزانی 2014 بوو ناوم لە بەشی بیرکاری هاتەوە. لە قۆناغی یەکەم، زۆر بە دوای پەرتوکێک دەگەڕام بە زمانی کوردی سەبارەت بە بیرکاری، بۆ ئەوەی تۆزێ خۆم بەهرەمەند بکەم ، بەڵام بەداخەوە، هیچ پەرتوکێک بوونی نەبوو لە نێو پەرتوکخانەی کوردی! لەو کاتە، پرسیارێکم بۆ دروست بوو؛ بۆ پەرتوکخانەی کوردی لەم ڕووە زۆر هەژار و نەدارە؟ لە کاتێکدا، کە هەموو نەتەوەیەک وا خەریکە بە ئەوپەڕی ئاواتی خۆی دەگات، کە لەم سەدەیە، زانست و هونەر، گەیشتۆتە پایەیەک، کە بە کارەبا و ئەتۆم ناوەستن!

وەرگێڕان یان نووسینی پەرتوکێک لەبارەی بیرکارییەوە، ئەگەر چی زۆر سانا و ئاسانیش بێت لە ڕووی ناوەڕۆکەوە، بەڵام کارێکی گران و تاقەت پڕوکێنە، چونکە ئامادەکارییەکی پێشوەختەی باشی گەرەکە و، هیچی لە بەهرەیەک کەمتر نییە، کە ئەم بەهرەیەش، تاقیکردنەوە و مەشقی زۆری پێوستە، جیا لەمەش، تا ئێستا لە زمانی کوردیدا، هیچ کارێکی وەها نەکراوە لەسەر زانستێکی ڕووخسارەکی وەک "بیرکاری"، نە وەک وەرگێڕان، نە وەک نووسین و دانانی پەرتوک بە زمانی کوردی؛ لە

ئاستێکی تۆزێک باڵا. بۆیە منێک، کە هێشتا ساڵێک بەسەر بەدەستهێنانی بڕوانامەی بەکالۆریۆسەکەم تێپەڕنەبووە، ئەو هەنگاوە سەختەم ناوە و ئەسپی خۆمم تاوداوە! بۆیە، لە کاتی کردنە کوردی زاراوەکان و دەستەواژەکان، دووچاری گرفت دەبینەوە کە هەندێ جار ناچاردەبین دەستەواژە و چەمەکان وەک خۆی دابنێینەوە. لەگەڵ ئەمەش، لە هەڵبژاردنی واتایەکی گونجاو بۆ هەندێ چەمک، شتی نوێ بەرچاو دەکەوێت.

ئەم پەرتوکە، تەنیا پەرتوکێکی ئاسایی و وەرگێڕانێکی ئاسایی نییە، بەڵکو تێکەڵ بە ئەزموونی؛ خوێندنەوە و هەوڵدانی خۆم بووە لە مەڕ بیرکاری لەو چەند ساڵەی کە خوێندکار بوومە. بۆیە، وەرگێڕانی ئەم پەرتوکە؛ وەرگێڕانێکە بە "ئیلهامەوە"، چونکە تەنیا بیرۆکە گشتییەکەم لە هەر بابەتێک وەرگرتووە و دووبارە بەدید و شێوازی خۆم، سەر لە نوێ دارشتنم بۆی کردووە، جا بە شتێک کەمتر یان زیاتر، وە لەگەڵ نووسینی پەراوێزەکان لە لایەن خۆمەوە. لەگەڵ ئەوەش، دوو بابەتم لە پەرتوکەکە لابردووە، دوو بابەتی ترم لە شوێنی داناوە، ئەمەش بەهۆکاری ئەوەی کە بەلامەوە گرنگترن. پەرتوکی "بیرکاری لە چەند خولەکێک" یەکێک بوو لەو پەرتوکانەی کە زۆر بە وردی خوێندمەوە و زۆر سەرنجی ڕاکێشام، پەرتوکێکە، کە ئەتوانم بڵێم؛ نزیکەی 70 لە سەدی مەعەریفەی بیرکاری لە خۆگرتووە، وەک نووسەریش خۆی باسی ئەکات. لەگەڵ ئەمەش، پەرتوکەکە جگە لەوەی ئاشنات دەکات بە هەندێ بابەت و چەمکی زۆر گرنگ، کێشە بیرکارییە شیکارنەکراوەکانیشت پێ دەناسێنێت (لە بەشی

سێزدەهەم) ئەو کێشە-پرسیارانەی کە تا هەنووکە شیکار نەکراون، وەک: گریمانەی ریمان، کێشەی ژمارە خۆبەشەکان... هتد.

لە کۆتایدا: هەموو هەوڵ و تەقەلا و دەستکەوتەکانی خۆم، هەموو ئەو بابەت و پەرتوکانەی خۆمم لێ بەهرەمەند کردووە، لەم چەند سەد کاغەزە خستوومەتە روو؛ سەرەرای ئەمەش، ئاستی سەرکەوتنیشم لەم کارە نازانم چەندێکە، هەموو ئەوەی کە دەیزانم ئەوەیە: هەستاوم بە هەوڵێک-ئەرکێکی خاکی. هیوا خوازم بەو هەوڵە، بتوانم فێنکیەک بخەمە نێو سینەی خوێنەر، هەروەها بەو ئاواتەی خوێنەری هێژا بە تام و چێژەوە خەریکی خوێندنەوەی ئەم پەرتوکە بێت.

هەموو کاتێک ئاگادارکردنەوەم لە هەڵەکان و کەم و کورییەکانم لە کەسانی شارەزا و پسپۆر، هەڵدەستین بە خزمەتێکی باشتر. خودای گەورە تەنیا خۆی سەرخەر و پاڵپشتە بۆ سەرکەوتن، هەر ئەویش مەبەست و نیازە.

ئوسامە تحسین پیربال

هەولێر، تەمووزی 2019

https://mathforkurd.wordpress.com

osamamathematics@gmail.com

fb/osama.mathematic

پێشەکی نووسەر

بیرکـاری زەمەنێکـی زۆرە، نـزیکەی چـوار هەزار سـاڵە خەت و خـاڵی داوە. ئـێمە تـا ئێسـتاش، پێـوانی گۆشـەکان دەکەیـن بەهـۆی ژمـارەیەکەوە، ئەویـش "گۆشـەی پلەیـی" کە دەکـاتە 360، واتە یەک خـولی (Period) تەواوی بـازنەیەک. ئەم ڕژێـمە، لە لایەن بابلییەکـانەوە داهێنـدرا. ئەنـدازەش هەر لەگەڵ شارسـتانییەتی گریـک سـەرئاو کەوت، بەجۆرێـک تێگەیشـتنیان لە مەڕ "ژمـارە ڕێژەییەکـانیش" هەبـووە. شارسـتانییەتی عەرەب، گەشـەیان بە "جەبـردا"، لە پـاڵ ئەمەش، بیـرۆکەی "سـفر" یـان ئـاودا وەک ژمـارەیەک. بیرکـاری، مێژووەکـی دەوڵەمەنـدی هەیە بە هۆکـارێکی تـایبەت، ئەویـش ئەوەیە کە سـوودی لـێ وەردەگیرێـت لە زانسـتەکانی تـری وەک: فیزیـا، کیمیـا، تەکنەلۆجیـا، ئەنـدازیاری، تەلارسـازی و بازرگـانی... هتـد. لە ڕووکـاری ئەم پەرتـوکە دەردەکەوێـت؛ هەمـوو بیرکـاری دەکرێـت لە 200 پـارچە نووسـینی کـورت و پوخـت پێشـکەش بکرێـت؟! ئەم پەرتـوکە، هەوڵـێکە بـۆ تەفسـیری هەنـدێک لە دەسـتکەوتە کـۆن و هاوچەرخەکـانی جیهـانی بیرکـاری و ڕوونکـردنەوە لە هەمـبەر ئەو دەسـتکەوتانە؛ کە بـۆچی ئەوەنـدە گرنـگ و

جێـی بـایەخن. بـۆ ئەوەی هەنـدێک بیـرۆکە و چەمـک بە پێـی پێوسـت بە وردەکارییەکـانییەوە بخـرێنە ڕوو، ئەوە پێوسـت دەکـات کە ڕۆبچیـنە چەقـی بـابەتەکە. لەگەڵ ئەمەش، هەر بابەتێـک باسـی گرنگـی و بەکـاربەرییەکەی کـراوە، بەڵام بەبـێ وردەکـارییەکەی. بیـرۆکە بیرکارییەکـان هەمـووی پشـت بە یەکتـر دەبەسـتن و پـێکەوە زنجیـرەیەک دروسـت دەکەن، بـۆیەش بابەتەکـانی ئەم پەرتـوکە، بەجۆرێـک دانـراوە، کە خزمـایەتی و پەیوەنـدی لە نێوانیانـدا هەیە. بەڵام دەرگـا کـراوەیە بـۆ ئەوەی بە دوای پەیوەنـدی زیـاتر بگەڕێـن. یەکێـک لە تایبەتمەنـدییە سەرسـامکەرەکانی بیرکـاری ئەوەیە، کە ئەو پانتـاییە فـراوانەی کە وا دەردەکەوێـت سـەربەخۆ و لێکجیـابن، ئەوە لە ڕاسـتیدا پەیوەنـدی لە نێوانیانـدا هەیە و بە قـوڵی پێکبەسـتراونەتەوە. تیـۆری بەرق (Moonshine theory)، کە نمـونەیەکی زینـدوی هـاوچەرخە بـۆ ئەمە، یان "هاوکێشە ڕیزکراوەکان" پەیوەندی بە شتگەلێکەوە هەیە.

ئەم پەرتـوکەش، بـریتییە لە بژاردنێکـی ورد، لە دەسـتکەوتی چـوار هەزار سـاڵەی مرۆڤـایەتی، بەڵام مـومکینە ئەمە تەنیـا دەسـپێک و سـەرەتایەک بێـت. هیواخـوازم کە ئەم پەرتـوکە، پـایەکی زیـاتر دەسـتەبەر بکات بۆ خوێندنەوەی زیاتر و بیرکردەوەیەکی قوڵتر.

پول گلندینینگ،

گەلاریزانی 2011

بەشی یەکەم

ژمارەکان

Numbers



پوختەی ژمارەکان

Introducing Numbers

"ژمارەکـان" لە بنچینەدا، ئاوەڵنـاوێکن بـۆ وسـفی "چەنـدێتی" شـتەکانی دەوروبەرمـان، ڕەنـگە بڵـێن: سـێ دانە کورسـی یـان دوو مەڕ...، کە تێـدا وەسـفی مەڕ و کورسـییەکانمان کـردووە لە ڕووی چەنـدایەتی نەک لە ڕووی چـۆنییەتی (شـێوە و پێکهـاتە)، بەڵام لە هەمـوو بارێـک نـاتوانین بـۆ وتنـی هەنـدێ شـت بەکاریـان بێنـین، یـاخود بەکارهێنـانی هەنـدێک لە ژمارەکـان، لە ژیـانی ڕۆژانە، بـۆ وەسـفی چەنـدێتی شـتەکان شـیاو نـین، وەک: بـزن و نیوێـک! ئەمەیـان ناشـێت بـۆ وەسـفکردنی چەنـدێتی هەنـدێک لەو شـتانە، چـونکە هـیچ مانـایەکی تەواو نـادات بەدەسـتەوە. ئەمەش واتـای ئەوەیە کە ژمارەکـان لە بەکارهێنـان دا، نـاوەڕۆک و مانـای جیـاوازی هەیە[2]، تـایبەت-لایەق بەشـتێکی دیـاریکراو نیـیە. لە شارسـتانییەتە کۆنەکـان، ژمارەکـان بەکـارهێنراون بە چەنـدین ڕێگـای جیـاواز، بـۆ ئەم مەبەسـتەش، هێمایـان بـۆ هەنـدێک لەو ژمـارانە دانـاوە، وەک لای میسـرییە کۆنەکـان، بە زمـانی "هیلـۆگرافی" شـلێری ئـاوی (Water lily) هێمـایەک بـووە بـۆ ژمـارە هەزار (1000). کە هەر بەم شـێوەیەش لە کردارەکـان بەکاریـان هێنـاوە، بەڵام زۆر سـەخت و چەتـوون بـووە. بە تێـپەڕ بـوونی کـات و زیـاتر

---

[2] ژمارەکـان لە ڕاسـتیدا پێکهـاتەیەکی (Form) بەتـاڵن! بـۆ نمـونە (1) چـی دەگەیەنێـت؟ ئەو ژمـارەیە (1) دەشـێت تۆپێـک، سـێوێک، یـان هەرشـتێکی تـر بێـت، بـۆیە شـتێک نییە لەم گێتییە بە ناوی: 3 یان 7 !

بەکارهێنانی ژمارەکان لە بوارەکانی ژیان، هێماکان بۆ نواندنی ژمارەکان سادە و ئاسان بوونەوە، لەگەڵ ئەم سادەکردنەوەیەش، هێشتا مامەڵەکردن لەگەڵ هەندێ جۆری ژمارە، زۆر ئاڵۆز و دژوارە. لە دوای ئەم سەردەمە کۆنەی میسرییەکان، سیستەمێکی مۆدێرنی نوێ پەیدا بوو، ئەویش "ڕژێمی ژماری دەیی" (Base of 10) کە ئەم ڕژێمە-سیستەمە لە شارستانییەتی عەرەبەوە بۆ جیهان پەلی هاویشت، تا دواجار گشت شارستانییەتەکانی تری گرتەوە. ڕژێمی ژمارەی دەیی، سەرجەم هەژمارکردنە زۆر ئاڵۆزەکانی زولاڵ و ئاسانکردەوە لە بەکارهێنان و نووسیندا، بەجۆرێک، ژمارەکان لە شێوەیەکی سەخت ڕزگاریان بوو، کە ئەمەش بووە هۆی لێکۆڵینەوەی زیاتر لە هەمبەر ژمارەکان؛ بۆ دۆزینەوەی تایبەتمەندییەکانیان و پۆلێنکردنیان. هەر لەگەڵ ئەم پێشکەوتنە، دەرگای چەندین پرسیار بە ڕووماندا کرایەوە، کە تا هەنووکەش شیکارییان نییە، بە واتایەکی تر، تا ئێستا یەکلانەکراونەتەوە.[3]

میسرییەکان، بەو هێمایانە گوزارشتیان لە ژمارەکان دەکرد و بەرکاریان دەهێنا.

[3] لە بیرکاریدا، یەکلاکردنەوەی پرسیک-کێشەیەک، گرینگترە لە خودی ئەوەی کە پرسەکە بەکام ئاراستە (سەلماندن یان پووچەڵکردنەوە) دەبردرێت. گرنگ یەکلاکردنەوەیە، جا بە هەر ئاراستەیەک بێت.

ژمارە سروشتییەکان

Natural numbers

ژمـــارە سروشـــتییەکان، ئەو ژمـــارە ســـادە و ســـاکارانەن، کە بـــۆ ژمـــاردنی شـــتە ئاســـاییەکان-بەرچاوەکـــانی ژیـــانی ڕۆژانە بەکاریـــان دێنـــین ... 1,2,3 . کـــارامەیی و بەکارهێنـــانی ئەم ژمـــارانە، بە شـــێوەیەکی ڕاســـتەوخۆ پەیوەنـــدی بە بازرگـــانی، کـــڕین و فرۆشـــتن، زەوی و زار ـ هەبـــووە. هەرچەنـــدە کـــرداری ژمـــاردن پێویســـتر بـــووە لە ژمارەکـــان، بـــۆ ئەم مەبەســـتەش، خـــودی ژمارەکـــان کردارەکـــانی: کـــۆکردنەوە و لێـــدەرکردن دەگـــرنە خۆیـــان بەشـــێوەیەکی ســـەرەکی. هەر بە زوویـــی ژمـــاردن زانـــراوە و کردارەکـــان لە دەڤەری ژمارەکـــان بـــوونەتە بەشـــێک لە زاراوە بیرکارییەکـــان، کە بە تەفســـیرێکەوە چـــوونە نێـــو ئەم پانتـــاییە، بـــوونەتە شـــتانێک، کە دەتـــوانن گۆڕانکـــاری و کـــار لە یەکتـــر بـــکەن. لە "کـــۆکردنەوە" (Addition) بە ســـانایی حـــاڵی دەبـــین کە شـــتێک دەخەیـــنە ســـەر شـــتێکی تـــر، بە زمـــانی بیرکـــاری: $1 + 1 = 2$. (کـــرداری "کـــۆکردنەوە" وەک هەوێنـــی کـــرداری "جـــارانکردن") چـــونکە کـــرداری کـــۆکردنەوە بـــوو کـــرداری جـــارانکردنی (Multiplication) بەدوای خۆیـــدا هێنـــا، کە ئەویـــش بەهـــۆی وردبـــوونەوە لە کـــۆی دوو شـــتی یەکســـان، وەک: $3 + 3$ یـــان $5 + 5$. دەپرســـین: چەنـــد شـــتمان هەیە لە 5 کـــۆمەڵە، کە هەر کـــۆمەڵەیەک 6 شـــت لەخۆدەگرێـــت؟ دیـــارە کە دەکـــاتە ژمـــارەی کۆمەڵەکـــان جـــارانی (×) شـــتەکانی نـــاو یەک کـــۆمەڵە، کە بە زمـــانی بیرکـــاری: $6 \times 5 = 30$. لە دوای ئەم هەنگـــاوە،

کرداری دابەش (Division) بەر ژێری مرۆڤ کەوت، واتە کرداری "جارانکردن" هەوێنی درکردن بوو بە کرداری "دابەش"، ڕوونە کە ئەم دوانە (جاران و دابەش) پێچەوانەی یەکترن (Inverse). ئەگەر 30 شت دابەش بکەینە سەر 5 کۆمەڵەی یەکسان، هەر کۆمەڵەیەک چەند شتی بەردەکەوێت؟ بەڵام لێرە دووچاری گرفتێک بووینەوە، ئەویش ئەوەیە: چی ڕوودەدات ئەگەر 31 دابەش بکەینە سەر 5 کۆمەڵە؟ یان چی ڕوودەدات ئەگەر 10 لە 1 دەربکەین[4] (?= 10 − 1)؟ بۆ وەڵامی ئەو پرسیارانە، پێوستمان بە ئەو دیوی ژمارە سروشتییەکان هەیە، کە دواتر ئاشنایان دەبین.



[4] پرسیارێکی لەم شێوە، بووە هۆی ئەوەی کە مرۆڤایەتی بیر لە ژمارەی "نایەکی-نەرێنی" (Negative numbers) بکاتەوە.

یەک

One

سەرەڕای هەبوونی ژمارە کش-سفریش، بەڵام ژمارە یەک بە دڵی زانستی ژمارە دادەندرێت. ژمارە یەک، ئاوەڵناوێکە بۆ تاکە شتێک یان یەک شت. تایبەتمەندی ئەو ژمارەیە، لەوەدایە کە بە کۆکردنەوەی لەگەڵ خۆی یان بە لێدەکردنی لەگەڵ خۆی، هەموو ژمارە ئەرێنییەکان (Positive) و نەرێنییەکان (Negative) بەرهەم دێنێت! کە ئەمەش بنەمای ژمارەدنەکان بوو، کە لەوانەشە سەرەتاکەی بگەڕێتەوە بۆ چەند سەد ساڵێک بەر لە زایین. گرنگی ئەم ژمارەیە هەر ئەوەیە نییە کە ژمارەکانی تری لێ بەرهەم دێت، بەڵکو لە کرداری "جاران" بەو ژمارە دەوترێت: دانەی بێ لایەن لە کرداری جارانکردن (Multiplication identity). ئەم ژمارەیە دواتر دەبێتە چەقی تیۆرییەک بە ناوی: تیۆری گرووپ. لەگەڵ ئەوەش، ژمارە یەک تایبەتمەندییەکی ناوازەتری هەیە، ئەویش دەبێتە بەشداربووی (Factor) هەموو ژمارەیەک، واتا هەموو ژمارەیەک دەتواندرێت لەسەر لێکدانی "خۆی و یەک" بنووسرێت، وەک: $(7 = 1 \times 7)$. ژمارە یەک لەدوای سفر، یەکەم ژمارەی تاکە (Odd). لە هەندێ بواری زانست[5]، ئەم ژمارەیە

---

[5] لە تیۆری ئەگەرەکان، ئەگەری ڕووداننی هەر ڕووداوێک دەکەوێتە نێوان 0 و 1. بۆ نموونە: ئەگەر مۆرە-بەردە زارێک هەڵدەین، ئەوە ئەگەری ئەو ژمارەی بۆمان دەردەچێت دەکاتە: 1/6 ، کە دیاریشە ئەو ژمارەیە لە نێوان سفر و یەک دایە.

گرنگییەکـی زۆر هەیە، بەجۆرێـک، هەنـدێک تیـۆری و ئەنجـامی بەدەسـت هـاتوو لەو تیۆریـانە، لە نێـوان "سـفر و یەک" دایە، کە ئەنجـامەکەش چەنـدە لە یەک نزیکتر بێت، ئەوەندە باشتر و مایەی دڵخۆشییە.

لەگەڵ ئەمەش، ژمـارە یەک دەبێـتە خەت و خـاڵی ژمـارە خۆبەشـەکان (Prime numbers) کە دواتر باسییان دەکەین.



سفر (کش)

Zero

سفر، بیرۆکەیەکی ئاڵۆز و تەلیسماوییە. بە درێژایی مێژوو، ئەم ژمارەیە جێگای سەرنج و مشت و مڕی زۆرێک لە بیرمەندان-فەیلەسوفان و بیرکاریزانان بووە، تەنانەت ناولێنانیشی، کارێکی هەر وا ئاسان نەبووە. سفر: ونترین شت بوو بە بەراورد لەگەڵ ژمارەکانی تر. مێژووی ناولێنانی سفر و بەکارهێنانی، لە دوای دۆزینەوە و بەکارهێنانی ژمارە سروشتییەکانەوە بووە. ئەگەر شارستانییەتی بابلییەکان بە نموونە وەرگرین، ئەوان هیچ شتێکیان نەبوو تاکو گوزارشت لە "سفر" بکەن، بۆیە گەر لە نێوان ژمارەکان کاریان بگەیشتبا بە سفر، ئەو شوێنەیان بە بۆشایی (Empty) بەجێ دەهێشت، بەڵام لە کۆتایی ژمارەدا نا.

کۆنترین پێناسە بۆ سفر، دەگەڕێتەوە بۆ بیرکاریزانە هیندییەکان لە دەوروبەری سەدەی نۆیەم، تەنانەت نوکتەیەکیش لەو بارەیەوە دراوەتە پاڵیان کە؛ هیندییەکان لە قرچۆکییان[6] سفریان داهێنا، تا بڵێن: هیچ پارەمان پێ نییە و موفلیسین. بەڵام لە پانتایی فەلسەفەوە هەمیشە ئەم ژمارەیە جێگای سەرنج بووە، چونکە وەک ژمارەکانی تر ڕەفتار ناکات! بۆ نموونە: دابەشکردنی ژمارەیەک بەسەر سفر، شتێکی بێ واتا و ناقولایە[7] ($\frac{3}{0}$)

[6] قرچۆک: ڕەزیل، چاوچنۆک، بەرچاوتەنگ.
[7] نا پەسەندە، ڕێگە پێنەدراوە.

واتـا پێناسـە نەکـراوە (Undefined)! یـان لێکـدانی هەر ژمـارەیەک لە سـفر، ئەنجـامەکەی هەر دەکـاتەوە سـفر! بە هەمـان شـێوە، سـفر تایبەتمەنـدییەکی جیـاوازتری هەیە، ئەویـش کـۆی هەر ژمـارەیەکی بکەیـن، دەکـاتەوە ژمـارەکە خـۆی! کە ئەم تایبەتمەنـدییەش لە بیرکـاری پێـی دەوتـرێ: دانـــەی بـێ لایـــەن لە کـــرداری کۆکردنەوە (Addition identity).



ناکۆتا

Infinity

ناکۆتا[8]، بە دەربڕینی بیرکارییانە بە (∞) هێما دەکرێت. ناکۆتا واتە شتێک کە کۆتایی نایەت و کۆتاییەکی نییە، یان هیچ سنوورێکی نییە. کارکردن لەگەڵ بیرکاری، بەبێ ڕووبەڕووبوونەوەی ناکۆتا، ئەستەمە و تەنانەت قوتابییانی قۆناغی ئامادەیی ئاشنایەتی لەگەڵ ئەم شتە سەیرە پەیدا دەکەن. زۆرێک لە بەڵگە (Argument) بیرکارییەکان و تەکنیکەکان، تێوەدەگلێن لە هەڵبژاردنی شتێک لە خشتەیەکی (List) ناکۆتا، وەیان چی ڕوو دەدات ئەگەر هەندێ دۆخ-پرۆسە لە ناکۆتا نزیک بکرێتەوە؟ بەردەوام بوون بەرە و سنووری بێ سنووری؟! کۆمەڵەی (Set) ناکۆتای ژمارەکان (واتە بێ سنور لە ژمارەمان هەیە) یان کۆمەڵەیەکی ناکۆتا لە شت، پێیان دەوترێت: کۆمەڵە ناکۆتاکان (Infinite sets)، کە ئەمانەش بەشێکن لە کلیلی بیرکاری.

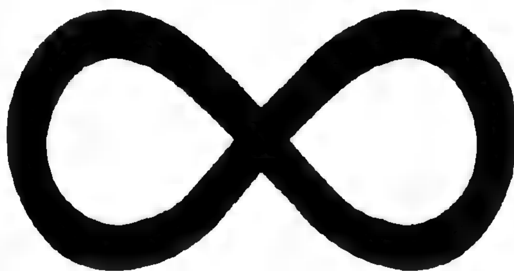
تەفسیری بیرکاریانە بۆ ئەو جۆرە کۆمەڵانە، دەمانبات بەرە و ئەنجامێکی زۆر جوان، ئەویش: پتر لە یەک جۆری ناکۆتامان هەیە، ئەمەش واتا زۆر جۆری ناکۆتا هەن، کە ناکۆتا هەیە لە ناکۆتایەکی

---

[8] نموونە وەک: ژماردنی ژمارە سروشتییەکان: ... ,1,2,3 هەتا بڕۆی، ژمارە هەر هەیە و کۆتایی نایەت، هەر بەم لۆژیکە، شتێکمان نییە بە ناوی'گەورەترین ژمارە' چونکە گریمان ئەگەر n گەورەترین ژمارە بێت، ئەوە n+1 لەو گەورەترە. ((لە سەرەتای پۆلی شەشی ئامادەیی، وام دەزانی 'ناکۆتا' ژمارەیە، بەلام مامۆستای بیرکاریم (م. هۆشمەند زیاد) پێی وتین: لە هیچ هەنگاوێکی جەبری ناتوانین هێمای 'ناکۆتا' دابنێینەوە، چونکە ژمارە نییە))

تـر جیـاوازە. لە ڕاسـتیدا بـێ شـمار جـۆری ناکۆتـا هەیە، گەورە و گەورتـرە. ئـێمەش لە هەنـدێکیان حـاڵی دەبـین بە هـۆی زارشـتی[9] بیرکـارییەوە، کە دواتـر ئەو کـۆمەڵە ناکۆتـانە پـۆلێن دەکەیـن بەسـەر دوو بەرە-دەسـتە. بیـرۆکەی "ناکۆتـا" هەر تـایبەت نیـیە بە بیرکـاری، بـۆیە بە شـێوەیەکی گشـتی سـێ جـۆر لە ناکۆتـا هەیە، ئەوانـیش: ناکۆتـا لە بیرکـاری، ناکۆتـا لە فیزیـا، ناکۆتـا لە هـزری-دیـدی ئـاینی، بەڵام ئەوەی ئـێمە زۆر گرنگـی پـێ دەدەیـن، ناکۆتایە لە بیرکاری و فیزیا، کە ئەمانەش بەڕاستی زۆر چەتوونن.[10]

$$1 + 2 + 3 + 4 + \cdots = \infty$$



[9] زارشت: لۆجیک.

[10] بلۆگی "بیرکاری بۆ کورد"

ڕژێمی ژمارەکان

Number system

ڕژێمـی (سیسـتەم) ژمارەکـان، ڕێـگەیەکە بـۆ نووسـینی ژمارەکـان، دەبڕینیـان و تێگەیشـتن لێیـان. لێکـۆڵینەوە لەوەی کە خـاڵی هاوبەشـی نێـوان ئەم ژمـارانە چیـیە؟ لە ژیـانی ڕۆژانەمانـدا، لەگەڵ ڕژێمـی ژمارەکـان: ڕژێمـی دەیـی[11] ئاشـنایەتیمان هەیە. ڕژێمـی دەیـی، ئەو ڕژێـمەیە کە بـۆتە پەیـڕەوی مرۆڤەکـان بـۆ کاروبـاری ڕۆژنە لە زۆر بـواردا. زۆر جـار، ژمـارەی لەم شـێوە دەنووسـین و بەکـاردێنین: 434.15 کە ڕەنووسـەکانی ئەم ژمـارەیە هەر یەکە و واتـایەکی هەیە، بەم شـێوەیە: لە ڕاسـت بـۆ چەپ (ژمـارە تەواوەکە 434): یەکـان، دەیـان، سـەدان،...، لە دوای فـاریزە (کەرتەکە 15): لە دەیـان، لە سـەدان، لە هەزاران.... بەم شـێوە بەهەریەکێـک لە مـانە دەوترێـت: کـۆلکە (Coefficient) . گەر بە وردی سـەیری ئەم نمـوونەی سەرەوە بکەین:

$$434.15 = (4 \times \mathbf{100}) + (3 \times \mathbf{10}) + (4 \times \mathbf{1}) + \left(\frac{1}{\mathbf{10}}\right) + \left(\frac{5}{\mathbf{100}}\right)$$

ئەمەش بـریتییە لە سـادەترین نووسـینی ژمارەکـان بەهـۆی ڕژێمـی دەیـی (Base of 10) کە (10) بە تـوانی ژمـارە سروشـتییەکان، کە ئەمەش بـۆ هەمـوو ژمـارە ڕاسـتییەکانی تـر بە هەمـان شـێوە بەکاردێـت. بەڵام لەگەڵ

---

[11] ئەو ڕژێـمەیە کە 10 جـۆر ژمـارە (لە 0 تـا 9) بەکاردەهێنێـت بـۆ نووسـین و دەربڕینـی هەموو ژمارەکانی تر.

ئەوەش، هیچ شتێکی وا تایبەت نییە بڵێین کە تەنیا بە ڕژێمی دەیی دەتوانین ژمارەکان بنووسین، هەر هەمان ژمارە، دەتواندرێت بە ڕژێمی-سیستەمی: 'یەک و سفر' واتا 'دووانی' (Binary) بنووسرێت. بەو سیستەمە ئەم ژمارەیە: 8.3125 دەگۆڕێت بۆ 1000.0101 بە پێی سیستەمی دووانی، کە ژمارەکان لە چەپەوە بۆ ڕاست واتای ئەمەیە: دووانی، چواری، هەشتی... واتە 2 بە توانی یەکەکان (Units). لەو ژمارەیە کە نووسیمان 8.3125 لە ڕاستەوە: نیوە، چارێک، هەشت یەک... . ڕژێمی دووانی، لە ئێستادا ڕۆڵی سەرەکی دەگێڕێت لە کارپێکردنی کۆمپیوتەر و بەرنامەسازی، تەنانەت ئەو نووسینەی بن دەستت؛ کە بە کۆمپیوتەر نووسراوەتەوە، هەمووی پشتی بە ڕژێمی دووانی بەستووە. هۆکاری ئەوەی ئەو ڕژێمە بۆتە خەت و خاڵی کۆمپیوتەر، ئەوەیە کە کارکردن لەگەڵ ئەو ڕژێمە زۆر خێرایە بە بەراورد بە ڕژێمی دەیی، چونکە لەم ڕژێمە تەنیا 0 و 1 بەکاردێت.

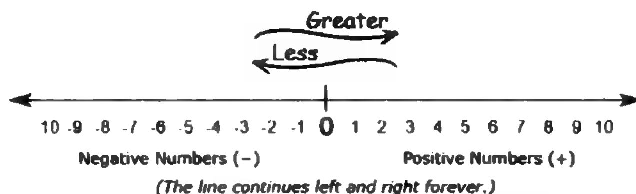
Decimal	Binary
0	0
1	1
2	10
3	11
— — —	— — —
10	1010
11	1011
12	1100

هێڵی ژمارەکان

Number line

هێڵی ژمارەکان، بابەت و زارشتێکی گرنگە لە بیرکاری بۆ تێگەیشتن و بیرکردنەوە لە واتای کردارە بیرکارییەکان، یان بۆ روونکردنەوە و پیشاندانی شیکاری زۆرێک لە هاوکێشەکان و لاسەنگەکان لەسەر ئەم هێڵە. هێڵی ژمارەکان، هێڵێکی راستە کە تێدا بەش بەش کراوە بە هێڵی وەک چیلکەی بچووک، کە تێدا هەموو ژمارە تەواوە ئەرێنی (+) و نەرێیەکان (-) دەگرێتە خۆی بە شێوەیەکی بنچینەیی. ئەم هێڵە، بە دوو ئاراستە بە بەردەوامی بە باری ئاسۆیی درێژدەبێتەوە ئەوانیش بە ئاراستەی راست و چەپ. کرداری کۆکردنەوەی لەسەر هێڵی ژمارەکان روونتر و ئاسانترە وەک: 4+3 لە کرداری کۆکردنەوە، جوڵانەوەی ئێمە لە هێڵی ژمارەکان بەرەو لای راستە، لەو نموونەی سەرەوە، لەسەر هێڵی ژمارەکان لە ژمارە 4 دا، 3 هەنگاو پاز دەدەین بۆ لای راست، هەر هەنگاوێکیش دەبێت یەک یەکە ببڕێت نەک زیاتر. بە هەمان شێوە بۆ کرداری لێ دەرکردن، جوڵەمان بەرەو لای چەپ دەبێت، بۆ نموونە: 3-5، لە ژمارە 5 سێ هەنگاو پازدەدەین بۆ لای چەپ، کە هەر هەنگاوێک دەبێت یەک یەکە ببڕێت نەک زیاتر. رەنگە پرسیارێکت لا دروست بێت، ئەویش: ئەی ئەمە: 10-1 چۆنە لەسەر هێڵی ژمارەکان؟ ئەمەشیان رۆشنە، لە ژمارە یەکەوە 10 هەنگاو پازبدە بۆ لای چەپ، کە ئەمەش دەکاتە 9. مومکینە پرسیارێکی ترت لا دروست بێت، ئەم هێڵە بەس ئەم

جـۆرە ژمـارانەی لەسـەرە؟ وەڵامەکە نەخێـر، بەڵکـو کەرتەکـانیش- ڕێژەیـی (Rational numbers) لەخـۆ دەگرێـت. بـۆ نمـونە لە نێـوان 0 و 1 دا نیومـان $\frac{1}{2} = 0.5$ هەیە، یـان $\frac{1}{3}$ هەیە، ئەو ژمـارانەش پێـان دەوتـرێن ژمـارە ڕێژەییەکـان (Rational numbers). بەڵام ئەوەش لە بیـرمەکە کە ژمـارە ڕێژییەکـانی نێـوان سـفر و یەک ئەوەنـدە زۆرن، کە لە توانـادانییە لەسـەر ئەم هـێڵە بنوسـرێت و ناشـکرێت. بەشـێکی تـری ژمارەکـانی سـەر ئەو هـێڵە، پێیـان دەوترێـت: ژمـارە ناڕێژەییەکـان (Irrational numbers). ژمـارە ڕێژەییەکـان و ژمـارە ناڕێژەییەکـان، بەیەکەوە کـۆمەڵەیەکی زۆر گەورە دروسـت دەکەن، کە پێـان دەوترێـت ژمـارە ڕاسـتییەکان (Real numbers). واتـا، کـۆمەڵەی ژمـارە سروشـتییەکان، تەواوەکـان، ڕێژەییەکـان و ناڕێژییەکـان هەموویـان بەیەکەوە کـۆمەڵەی ژمـارە ڕاستییەکان دروست دەکەن.





خێزانی ژمارەکان

Family of numbers

ژمارەکـان دەتوانـدریت دابەشـبکرێنە سـەر چەنـد تـوخم و رەگەزێـک، کە جیایـان بکەیـنەوە بە پێـی ئەو خاسـییەت و تایبەتمەنـدییانەی هەیەتـی. چەنـدین ڕێگـا و شـێواز هەن بـۆ جیـاکردنەوەی ئەو ژمـارانە، کە لە شـتێک یـان سـیفەتێک لێکچونیـان هەیە و ، بیـانخەینە نـاو خێزانێـک، پاشـان نـاوێکی تایبەتییـان پـێ بـدەین. وەک چـۆن ناکۆتـا ژمارەمـان هەیە، بەم شـێوەیەش ناکۆتـا ڕێگـای هەمەجـۆر هەیە بـۆ جیـاوازی کـردن لە نێـوان جـۆری ژمارەکـان و بەش بەش کردنیـان-جیاکردنەوەیـان، وەک: ژمـارە سروشـتییەکان، ژمـارە تەواوەکـان، ژمـارە ڕێژەییەکـان، ژمـارە ناڕێژەییەکـان، ژمـارە ئاوێتەکـان، ژمـارە ڕاسـتییەکان، یـان هەمـوو ئەو شـتانەی کە ئـێمە لەو جیهـانە دەتـوانین بیـانژمێرین، وەک: جـۆری درەختەکـان، جـۆری پاسـکیلەکان... هتـد، کە هەمـوو ئەمـانە دەکرێـت هەر یەکەیـان وەک خێزانێـک دابنـێن. وتمـان کـۆمەڵەیەک هەیە گەورەیە، کە پێـی دەوتـرێ ژمـارە ڕاسـتییەکان، لەنـاو ئەم کـۆمەڵەیە، خێزانێکـی بچـوکتر هەیە پێـان دەوتـرێ ژمـارە ناڕێژەییەکـان، خێزانـی ژمـارە ڕێژەییەکـان و چەنـدین خێزانـی تـر لە خـۆ دەگرێـت، وەک: خێزانـی ژمـارە جەبرییەکـان و ژمـارە ناجەبرییەکـان-ترێسندێنتەڵەکان [12].

[12] ژمـارەی ترێسـندێنتەڵ (Transcendental number) بـریتییە لەو ژمـارەی کە جەبـری نییە، واتە نـابێتە شـیکاری ڕادەدارێـک کە کۆلکەکـانی ژمـارەی ڕێـژەین. ژمـارەی جەبـریش ئەو

کاتێک دەڵێن ژمارەیەک سەر بە فلانە خێزانە، ئەمە واتە لە ڕێگەی شوناسی ئەو خێزانە؛ لە تایبەتمەندییە هەمەچەشنەکانی ئەو ژمارەیە دەگەین و ئەوەمان بۆ ڕوون دەبێتەوە کە ئێمە چ پرسیارگەلێک دەتوانین دەربارەی ئەم ژمارەیە بپرسین. زۆر جار، دروست بوونی ئەم خێزانانە، لە نەخشەیەکەوە (Function) سەرهەڵدەدات، کە نەخشەکە وەسفی چۆنییەتی دروستبوونی "یەکبەدوای یەکی" ژمارەکان دەکات، واتە لە ڕێگەی نەخشەیەکەوە دەتوانیت خێزانێک لە ژمارە دروست بکەین کە هەر ژمارەیەکی-دانە خێزانەکە لەو نەخشە بەدەستهێنراوە. یانیش، بۆ هەرخێزانێک، ڕێسایەک (Rule) هەیە کە وەسفی دانەکانی ئەم خێزانەی پێبکات و بیاناسینەوە.

ئێمە بە باشی ئاشنای ژمارە جووتەکانین (Even numbers)، بەڵام ئەو ژمارانە چین؟ بۆیە بە شێوەیەکی بیرکارییانە، دەتوانین بەو شێوە وەسفی هەموو ژمارە جووتەکان بکەین، ئەویش: ژمارە جووتەکان، ئەو ژمارە سروشتیانەن کە لەسەر ئەو شێوە: $2 \times n$ دەنووسرێت، کە nیش خۆی ژمارەیەکی سروشتییە. ئەگەر نرخی n یەک بێت، دەکاتە: $2 \times 1 = 2$، ئەگەر نرخی n دوو بێت، ئەوە $2 \times 2 = 4$، ئەگەر نرخی n بکاتە 3، ئەوا: $2 \times 3 = 6$ ....، ئەمەش دیارە کە هەموویان ژمارەی جووتن. بۆیە توانیمان لە ڕێگەی ئەم یاسایەوە، وەسفی چۆنییەتی دۆزینەوەی ژمارە جووتەکان بکەین، واتا سەرجەم ژمارە

ژمارەیە کە دەبێتە شیکار بۆ ڕادەدارێک کە کۆلکەکانی ژمارەی ڕێژەین، وەک: $\sqrt{2}$، بەڵام π ژمارەیەکی ترێسندێنتەڵە، چونکە نابێتە شیکار بۆ ئەو جۆرە ڕادەدارەی باسمان کرد.

جووتەکـــانیش پیـــڕەوی ئەم یاســـایە دەکەن! کە هـــیچ ژمـــارەیەکی جـــووت نادۆزیتەوە لەم یاسایە لابدات و قسەی بشکێنێت.

هەر هەرمـــان پرســـیار بـــۆ ژمـــارە تاکەکـــان (Odd numbers) ئەو ژمـــارانە چـــین و هـــیچ یاســـایەک هەیە بۆیـــان هاوشـــێوەی ژمـــارە جووتەکـــان؟ یاســـاکەش بـــۆ ژمـــارە تاکەکـــان بـــریتییە لە: $2n + 1$ ، دیـــارە بەم یاســـایە ســـەرجەم ژمـــارە تاکەکـــانی لـــێ بەرهەم دێـــت، کە هەمـــوو ژمـــارە تاکەکـــانیش دەبێـــت پەیـــڕەوی ئەم یاســـایە بـــکەن بە ڕووح و بە گیـــان! ئەگەر نرخـــی n یەک بێـــــــت ئەوا: $2(1) + 1 = 3$، ئەگەر نرخـــــــی n دوو بێـــــــت، ئەوا: $2(2) + 1 = 5$، بەم شێوە، هەموو ژمارە تاکەکان بەرهەم دێن.

لە بیرکاریـــــــدا خێزانێـــــــک هەیە، کە کەم کەس هەیە لە نـــــــاوی ئەم خێـــــــزانەی خەبەردار نەبێـــــــت، ئەویـــــــش خێزانـــــــی ژمارەکـــــــانی فیبۆنـــــــاچی (Fibonacci)[13] کە ئەمـــــــانەن : $\{1،2،3،5،8،13،21،34، … \}$. ئەم خێـــزانە، لە خێزانـــی ژمـــارە سروشـــتییەکانەوە دروســـت دەبێـــت، یاساکەشـــی بەم شـــێوەیە: هەر ژمـــارەک لەو خێـــزانە، لە ســـەرجەمی دوو ژمـــارەی پـــێش خـــۆی دروســـت دەبێـــت. ســـەرەتا لە 1 دەســـت پێـــدەکەین، ئێســـتا: $1 + 1 = 2$ ،دواتـــر ئەو ئەنجـــامەی بەدەســـتمان هێنـــاوە لەگەڵ ژمـــارە ئەنجـــامی پـــێش خـــۆی کـــــۆی بکەیـــــنەوە، $2 + 1 = 3$، لێـــــرە 3 دەســـــتگیر بـــــوو، 3 لەگەڵ 2 کـــۆبکەینەوە، دەکـــاتە: 5، پاشـــان 5 لەگەڵ 3 کـــۆبکەینەوە، دەکـــاتە: 8، وە 8

[13] لیۆنـــاردۆ پیناســـۆ بیگۆلـــۆ" ناســـراو بە "لیۆنـــاردۆ فیبۆنـــاچی". فیبۆنـــاچی زانـــای بیرکـــاری بـــوو لەچەرخەکـــانی ناوەراســـت، لەســـاڵی 1202 واتە لەســـــەدەی ســـێزدەهەم. پەرتـــووکێکی بەنێـــوی (Liber Abbaci) هەیە، کە پەرتووکی ژمێرپارییە. لەگەڵ ئەمەش، کاری بازرگانی دەکرد.

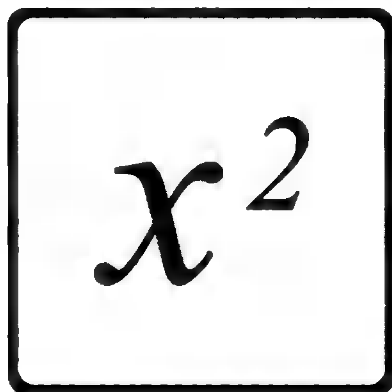
لەگەڵ 5 کـــۆبکەینەوە، دەکـــاتە: 13، تـــا بەم شـــێوە ئەو خێـــزانە دروســـت دەبێـــت. ئەم ژمـــارەیە جـــگە لە لایەنـــی پەتیـــیەکەی (Abstract)، لە زینـــدەزانی گرنگـــی هەیە و لە هەنـــدێ دیـــاردەی زاوزێـــی ئاژەڵەکانـــدا دەبینـــدرێت، هەروەهـــا پەیوەنـــدی بە ڕێـــژەی زێـــڕین (Golden ratio) و سێگۆشـــەی پاسکاڵ (Pascal triangle) هەیە.

بەرچاوڕوونی زیاتر لە مەڕ ژمارەکانی فیبوناچی:

1 1+1=2 1+2=3 2+3=5 3+5=8 5+8=13.

خێزانێکـــی تـــر کە دەتـــوانین بیهێنیـــنە بـــوون، ئەویـــش: هەر ژمـــارەیەکی سروشـــتی لێکـــدانی خـــۆی بـــکەی: یەک جـــارانی یەک، دوو جـــارانی دوو، ســـێ جـــارانی ســـێ، ....، ئەویـــش ئەو شـــێوەی دەبێـــت: ...,1،4،9،16 کە دیـــارە یاسەکەی ئەمیش بریتییە لە: n^2 ، یان دووجای n .

$1 \times 1 = 1$ ، $2 \times 2 = 4$ ، $3 \times 3 = 9$ ، $4 \times 4 = 16$ ، $5 \times 5 = 25$ ...



پێکەوەبەستانی ژمارەکان

Combining numbers

چەنـــدین ڕێگـــاو شـــێواز هەن بـــۆ ئەوەی دوو ژمـــارە یـــان زیـــاتر بەیەکەوە ببەســـتینەوە بەهـــۆی کردارەکـــانەوە، کە تێـــدا دەتوانـــدرێت دانەدەم بکـــرێن بەهـــۆی بەکارهێنـــانی کردارەکـــانی: کـــۆکردنەوە، کەم کـــردنەوە، جـــاران و دابەش (ژێـــرە ســـفر نەبێـــت)، ئەمەش بە ئاتـــاجی دروســـتکردنی ژمـــارەیەکی تـــر. لە ڕاســـتیدا، ئەگەر ســـەرنج بـــدەینە: $a - b$، بە شـــێوەی: $a + (-b)$ دەنووســـرێت، یـــان $\frac{a}{b}$، بە شـــێوەی: $a \times \frac{1}{b}$ دەنووســـرێت، کەواتە لە نـــاو هەنـــاوی هەر یەکێـــک لە دابەش و کـــۆکردنەوە، ئەوی تـــر بـــوونی هەیە. کردارەکـــانی جـــارانکردن و کـــۆکردنەوە، تایبەتمەنـــدییەکیان هەیە کە پێـــی دەوتـــــــرێن تایبەتمەنـــــــدی ئـــــــاڵوگۆڕی (Commutative)، کە لەم تایبەتمەنـــدییە، ڕێزبەنـــدی ژمارەکـــان لە کـــاتی هەژمـــارکردنی کردارەکـــانی کـــۆکردنەوە و جـــارانکردن، جیـــاوازییەک دروســـت ناکـــات[14]، بەڵام بـــۆ کردارەکـانی تـر، یـان بـوونی زیـاتر لە کردارێـک لە نـاو بڕێکـی جەبـری یـان بڕێکـــی نـــاجەبری، جیـــاوازی دروســـت دەکـــات و ئەنجـــامەکە گۆڕانکـــاری بەســـەردا دێـــت! بـــۆیە، مەبەســـت لەم تایبەتمەنـــدییە ئەوەیە: بـــڕەکە بەس جـــاران یـــان بەس کـــۆکردنەوە لەخۆگرتبێـــت، وەک: $1 + 2 = 2 + 1$ ، کە هـیچ جیـاوازییەکی نیـیە. ئەمە بـۆ دوو ژمـارە ئاسـایی، کـارەکە سـادە بـوو، بەڵام ئەگەر بێـــت و زیـــاتر لە دوو ژمارەمـــان هەبێـــت یـــان لەگەڵ چەنـــد

---

[14] لێکدانی ڕیزکراوەکان (Matrices)، سیفەتی ئاڵوگۆڕی نییە: $A \times B \neq B \times A$.

کردارێـــک، ئەوە پێویســـت دەکـــات کەوانە ( ) بەکاربهێنـــدرێت، ئەگەر ســـێ ڕادەمـــان هەبێـــت، ئەوە دوو لەو ڕادانە، پێویســـتە بخـــرێنە نـــاو کەوانەیەک. وتمـان ئەگەر سـێ ڕادە بێـت، ئەوە دوو ڕێگـات هەیە (بەبـێ شـوێن گـۆڕینی ڕادەکان) بۆ ئەوەی دووان لەو ڕادانە بخیتە ناو کەوانە، بەم شێوەیە:

$a + (b + c)$ یان $(a + b) + c$. ئەم ســـــیفەتەش پێـــــی دەوترێـــــت تایبەتمەنـدی "یەکتربەسـتن" (Associativity). سـیفەتی "بەشـینەوە بەسـەر کـــرداری کـــۆکردنەوە" (Distribution)، کە تێـــدا ئەو ڕادەی لە پـــێش کەوانەکە هەیە، دەبێـت خـۆی لێکـدانی هەمـوو ڕادەکـانی نـاو کەوانەکە بکـات. بە نمـونەیەکی ژیـانی ڕۆژانە: مامۆسـتا کە دێـتە پـۆل، بـۆ هەمـوو قوتابییەکـان وانە دەڵێـــتەوە، نەک تەنیـــا بـــۆ یەک یـــان دووان. لەم وێـــنەی خـــوارەوە تایبەتمەنـــدییەکان لەگەڵ ژمارەکـــان و کردارەکـــان خـــراوەتە ڕوو بـــۆ هەر یەکێکیان.

Commutativity

$x + y = y + x$

Associativity

Distributivity

ژمارە ڕێژەییەکان

Rational numbers

ژمـــارە ڕێژەییـــەکان، لـــە ئـــەنجامی دابەشـــکردنی ژمارەیـــەکی تـــەواو (Integer) بەســـەر ژمارەیـــەکی تـــەواو (ســـفر نەبێـــت) دروســـت دەبێـــت. واتـــە ســـەرجەم ژمـــارە ڕێژەییـــەکان، دەتوانـــدرێت بە شـــێوەی کەرت بنووســـرێت. ئەو ژمـــارەی کـــە دابەشـــدەکرێت، پێیـــدەوترێت: ســـەرە-بەشـــکراو (Denominator)، لەکاتێکـــدا ئەو ژمـــارەی پێیـــی دابـــەش دەکرێـــت، پێـــی دەوترێت: ژێرە-بەشدراو (Numenator).

کاتێـــک ژمارەیـــەکی ڕێژەیـــی بەشـــێوەی دەیـــی دەنووســـرێت، دوو شێوازی هەیـە: یـان کۆتـایی دێت و تـەواو دەبێت، یـاخود تـەواو نابێت، وەک: $\frac{1}{3} = 0.3333...$ کۆتـایی نایـەت و دیاریشـە یەکسـانن، ئەمەش دوو لقـی لـێ دەبێـتەوە. ئەگـەر سـەرنج بـدەیتە ئەو ژمـارە ڕێژەییـەی سـەرەوە کـە بەشـێوەی دەیـی نووسـراوە، دووبـارە دەبێتـەوە تـا ناکۆتـا بە شـێوەیەکی جێگـر یـان جـوان، ئەمەش واتـە گـەر هـاتوو ژمارەیـەکی دەیـی بەشـێوەیەکی دووبـارە نووسـراوە، ئـەوە ڕێژەییـە، بەڵام ئەگەر بە نـا-دووبـارەیی بەردەوام بـوو، ئەوە ژمـارەیەکی نـاڕێژەییە، چـونکە لە ژمـارە ناڕێژەییەکـان، هـیچ شـێوازێکی دووبـارەیی-ڕێـک بـوونی نییە. هەڵبـەتە چـونکە ژمـارە تـەواوەکان ناکۆتـان، کەواتە ناکۆتـا لە ژمـارە ڕێژەیمـان هەنە. بەڵام ئـەمە بـە واتـای ئـەوە نایـەت کـە ژمـارە ڕێژەییـەکان ژمارەیـان زیـاترە لـە ژمـارە تـەواوەکان، بـەڵکو

سەلمێنراوە کە هێندەی یەکتر دانەیان تێدایە (هەمان کاردینالەتیان هەیە).[15]

پەیدابوونی ئەو ژمارانە، بەهۆی سەرنجدان لە هاوکێشەکانەوە بوو، ئەویش: ئایا شێکاری هاوکێشەیەکی لەم شێوەیە: $2x - 3 = 0$ چییە؟ ئەو ژمارەیە دەبێت چەند (چۆن) بێت بۆ ئەوەی پاسەدانی ئەم جۆرە هاوکێشەیە بکات؟ ئەمەش دیارە کە ژمارەیەکە، لە توخمی ژمارە تەواوەکان و سروشتییەکان نییە.

$$\frac{a}{b}$$

[15] کاردینالیتی، واتە ژمارەی دانەکانی ناو کۆمەڵەیەک یان خێزانێک.

دووجاکان، ڕەگی دووجا و هێزەکان-توان

Squares, square roots, and powers

دووجـای هەر ژمـارەیەک x ، دەکـاتە ژمـارەکە لێکـدانی خـۆی، کە بە بیرکارییـانە بەو شـێوە دەنووسـرێت: $x \times x = x^2$. زارشـتی دووجـا لە ڕاسـتیدا دەگەڕێـتەوە بـۆ هەژمـارکردنی ڕووبەری (Area) چـوارلای یەکسـان، کە تێـدا بـۆ هەژمـارکردنی ڕووبەرەکەی؛ درێـژی لایەک، جـارانی خـۆی دەکەیـن و ڕووبەرەکەمـان دەسـت دەکەوێـت. دووجـای هەر ژمـارەیەک، ئەنجـامەکەی هەمیشـە ئەرێنیـیە (+) و گەورەتـرە لە سـفر یـان سـفرە ، هۆکـاری ئەمەش ئەوەیە کە: $+ = (- \times -)$ ، باشـە ئەمە چـۆن؟[16] دووجـای سـفریش، هەر دەکـاتەوە سـفر. هەر بەم هـۆیە، هەمـوو ژمـارەیەکی دووجـاکراوی ئەرێنـی (+)، دەبێـت دووجـای دوو ژمـارە بێـت $+x$ و $-x$. بە شـێوەیەکی گشـتی، هەر ژمـارەک، چەنـد جـار جـارانی خۆی بکرێت، ئەوە توانەکەش هەر ئەوەندە جارە دەبێت، واتە:

$$x^n \times x^m = x^{n+m} \text{،} (x^n)^m = x^{nm} \text{،} \ x^0 = 0 \text{،} x^1 = x \text{،} x^{-1} = \frac{1}{x}$$

---

16 دەتوانین ئەم ڕاستییە بسەلمێنین، ئەویش بەهۆی شێواز-میتۆدێکی سادە:

$-2(0) = 0 \rightarrow -2(1-1) = 0 \rightarrow -2(1) \quad -2(-1) = 0$

دیـارە کە دەبێـت نیشـانەی نێـوان ئەو دوو ڕادەیەی کۆتـایی، بکـاتە + ، چـونکە یەکەم هەنگـاو $-2(0) = 0$ ئەمە شـتێکی ڕاسـتە، لە هەنگـاوی کۆتـایی بـۆ ئەوەی ئەم ڕاسـتییە بپارێزرێـت، ئەوە یەک ئەگەر هەیە، ئەویش ئەوەیە کە دەبێت: $-2(-1) = +2$

هەر لە شێوەی: $x^n \times x^m = x^{n+m}$ دا، ئەوەمان دەست دەکەوێت کە ڕەگی دووجای هەر ژمارەیەکیش دەتواندرێت بە شێوەی بنچینەک و توانێک بنووسرێت، کە ڕەگی دووجا، دەبێتە: توانی $\frac{1}{2}$ بۆ ژمارەی ژێر ڕەگەکە، واتە: $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$.



ژمارە خۆبەشەکان (سەرەتاییەکان)

Prime numbers

ژمـــارە خۆبەشـــەکان (ســـەرەتاییەکان)، ئەو ژمـــارە تەواوە ئایەکییـــانەن (+) کە تەنیـــا دوو بەشـــداربوو (Factor) هەیە، ئەوانـــیش "یەک و خـــۆی". لە 11 ژمـــــــــارەی ســـــــــەرەتای خۆبەشـــــــــەکان، ئەمـــــــــانەن: ...،2،3،5،7،11،13،17،19،23،29،31. لەگەڵ ئەوەش، ناکۆتـــــــــــــا لەم ژمـــارانە هەن! ژمـــارە یەک، بە خـــۆبەش دانانـــدرێت[17]. ژمـــارە 2، یەکەم ژمـارەی خۆبەشـــە، لەگەڵ ئەمەش، لە ژمـارە جووتەکـان، تەنیـا 2 خۆبەشـــە. هەر ژمـــارەیەک کە خـــۆبەش نەبێـــت، پێـــی دەوتـــرێن ژمـــارەی دابەش (Composite number). هەمـــوو ژمـــارەیەکی دابەش، دەتوانـــدرێت لە ئەنجامی لێکدانی چەند ژمارەیەکی خۆبەش بنووسرێت، وەک:

$$12 = 2^2 \times 3 \text{ یان } 21 = 3 \times 7 \text{ یان } 270 = 2 \times 3^3 \times 5$$

لەگەڵ ئەوەشـــدا، ژمـــارە خۆبەشـــەکان بە بنـــاغەیەکی ســـەرەکی تیـــۆری ژمارەکـــان دادەنـــدرێت. بـــۆ ئەوەی بـــزانین کە ژمـــارەیەک خۆبەشـــە یـــان نـــا، ئەمە وا پێنـــاچێ کـــارێکی هەروا ئاســـان بێـــت، ئەوە ڕوونە کە تەواوی ژمـــارە جووتەکـان جگە لە 2، خـۆبەش نـین، بەڵام بـۆ ژمـارە تاکەکـان، دۆزینەوەیـان تۆزێـک تـاقەت پـڕوکێنە. ژمـارە خۆبەشـەکان بنـاغەیەکی بەهێـزی بە نهێنـی

[17] پرســی ژمـــارە 1 کە بـۆچی ئەم ژمـــارە خـــۆبەش نیـــیە، ئەمە دانوســـتانی بیرمەنـــدان و زانایـــانی بیرکـــارییە، چـــونکە ئەگەر بێـــت و 1 بە خـــۆبەش دابنـــدرێت، ئەوە یەکێـــک لە بیـــردۆزە هەرە سەرەکییەکانی تیۆری ژمارەکان لێکهەڵدەوەشێتەوە.

کردنن لە بواری پاراستن و ئاسایش. گەلێک کێشەی بیرکاری هەن، کە پەیوەستن بەو ژمارانەوە، کە تا ئێستاش شیکارنەکراون، یەکێک لە کێشە هەرە دیارەکان، گریمانەی ریمانە (Riemann hypothis) کە پەیوەندی بە بڵاوبوونەوەی ژمارە خۆبەشەکانە، واتە ئەو ژمارانە چۆن چۆنی بەنێو ژمارە سروشتییەکان بڵاو بوونەتەوە و دابەشبوونە؟!

"ژمارە خۆبەشەکان بە ئەتۆمی بیرکاری ناسراون"[18]

سروشتی ئەم ژمارانە هەڵخەڵەتێنەرە لە دۆزینەوە و درک کردن بە تایبەتمەندییەکانی، کە هەر لە زووەوە، ماتماتیکزانەکانی بە چاخ و پەنگ بردووە[19]! لەگەڵ ئەمەش، تا هەنووکەش بوونەتە کێشە لەبەردەم هەندێ پرسی چارەسەرنەکراوی بیرکاری. سیمای تەلیسماوی ئەو ژمارانە، بەر لەهەموو شتێک ئەوەیە کە؛ یاسایەک یا میتۆدێک تا ئێستا بوونی نییە بۆ ئەوەی بتوانین ئەو ژمارانەی پێ بەرهەمبهێنین.[20]

[18] Tony Crilly How big is infinity? (2014).

[19] لە خشتەبردووە.

[20] بلۆگی "بیرکاری بۆ کورد"

بەشدراوەکان و بەرماوەکان

Divisors and remainders

دابەشــــکردنی ژمـــــارەیەک بەســـــەر ژمـــــارەیەکی تــــر، بە بــــێ ئەوەی بەرمـــاوەی لــــێ بمێنیـــتەوە، بەو هەمـــاهەنگییە دەڵــێن: دابەش دەبێــت. ئەمەش واتە لە ئەنجـامی دابەشـــەکە هـــیچ بەرمـــاوەیەک نـــامێنێتەوە، وەک: ژمـــارە 4 دەبێـــــتە بەشـــــدراوی (Divisor) ژمــــارە 12 ، ئەو 12 یە پێـــی دەڵــــێن: بەشــکراو (Divided)، کە 12 بەســـەر 4 دابەش دەبێــت بەبـــێ ئەوەی مـــاوەی لـــــێ بمێنیـــــتەوە. بەڵام دەربـــــارەی 13 دابەشـــــی 4 ؟ لەم بـــــارەدا، 4 بەشــدراوی 13 نیـــیە، چـــونکە 13 بە شـــێوەیەکی تەواو دابەش نابێـــت بەســـەر 3 بـــێ ئەوەی بەرمـــاوەی لـــێ نەمێنیـــتەوە لەم بـــارەدا، ئەنجـامەکە دەکـاتە 3 و بەرمـــاوە 1 . بە ڕێگـــایەکی تـــر دەتـــوانین بڵـــێن: گەورەتـــرین ژمـــارەی تەواوی لە 13 بچـــــــــوکتر بـــــــــریتییە لە 12 کە دابەشــــــــــی 4 دەبێـــــــت، واتە: 13 = 12 + 1، کە لێـــــرەوە بەرمـــــاوەکە دەبینـــــین کە بــــــریتییە لە 1. کە دیاریشە ئەنجامی ئەو دابەشکارییە دەکاتە $3\frac{1}{4}$ (3 تەواو + ¼).

ژمـــــــــــــــــارە 3 و 4 هەردووکیـــــــــــــــــــــان 12 دابەش دەکەن (هەروەهــــــا 6،2،1 و 12). ئەگەر ژمــــــارەیەکی سروشـــــتی p، دابەشـــــی ژمـــارەیەکی تـــر q بکەیـــن، q لەم بـــارە p دابەش نەکـــات، ئەوە ژمـــارەیەکەی تـــر r هەیە کە پێـــی دەڵـــێن: بەرمـــاوە، کە ئەم r لە q بچـــوکترە. ئەمەش واتە یاســـا گشـــتییەکەی بەم شـــێوەیە: $p = kq + r$ کاتێـــک k ژمـــارەیەکی سروشتییە.

ئەگەر دوو ژمارەی p و q مان هەبێت، گەورەترین کۆلکەی هاوبەش؛ بریتییە لە گەورەترین ژمارە، کە تێیدا p و q هەردووکیان بەسەریدا دابەش دەبن. لەبەر ئەوەی 1 ژمارەیەکی شازە و هەموو ژمارەیەک بەسەر 1 دابەش دەبێت، بۆیە گەورەترین کۆلکەی هاوبەش بریتییە لە 1 یان گەورەترە لە یەک. ئەگەر لە بارێک گەورەترین کۆلکەی هاوبەش 1 بوو، ئەوە ئەو دوو ژمارەیە پێیان دەوترێن: هاوەڵە خۆبەش (Coprime).

لە رێگەی ژمارەی دابەشکەر دەگەین بە خێزانێکی تری ژمارەکان، کە زۆر سەرنج راکێش و عەزیمن، کە پێیان دەوترێن ژمارە 'بێخەوشەکان' یان ژمارە 'نمونەییەکان' (Perfect numbers). ژمارە بێخەوشەکان، ئەو ژمارانەن کە سەرجەمی بەشداربووە شیاوەکانی (واتە ژمارەکە خۆی لەگەڵ نییە) پێکەوە، ئەنجامەکەی هەر دەکاتەوە ژمارەکە خۆی. بۆ نمونە: ژمارە 6 ژمارەیەکی بێخەوشە[21]، چونکە بەشداربووەکانی 6 بریتین لە: 3،2،1 ، کە کۆی ئەم ژمارانە: $6 = 3 + 2 + 1$ دەکاتەوە ژمارەکە خۆی کە بریتییە لە 6. ژمارەیەکی تر، بریتییە لە: 28 کە بەشداربووە شیاوەکانی بریتین لە: 14،7،4،2،1 کە کۆی ئەو ژمارانە: $28 = 14 + 7 + 4 + 2 + 1$ دەکاتەوە ژمارەکە

[21] لە پەرتوکی (The book of numbers.Tim Glynne-Jones) لە وەسفی ژمارە 6 نووسراوە: ژمارە 6 لە بەر ئەو هۆیە ژمارەیەکی بێخەوش نییە کە خودا دونیای بە 6 رۆژ دروست کرد، بەڵکو خودا دونیای بە 6 رۆژ دروست کرد چونکە 6 ژمارەیەکی بێخەوشە.

خـــۆی. ســـــێیەم ژمـــــارەی بـــێخەوش، بـــــریتییە لە 496 کە کـــــۆی بەشـــــداربووەکانی:

$$1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 31 + 62 + 124 + 248 = 496$$

دەکاتەوە خۆی.

ژمـــارە بێخەوشـــەکان زۆر نـــاوازەن و دۆزینەوەیـــان ئاســـان نیـــیە (دۆزیـنەوەی ئەو ژمـارانە پشـتی بە ژمـارە خۆبەشـەکان بەسـتووە، هەر بـۆیە ئیقلیـد یاسـایەکی بـۆ دۆزیـنەوەی ئەم ژمـارانە داتاشـیووە). لەگەڵ ئەوەش تـا هەنووکە بیرکاریزانان توێژینەوە دەکەن لە سەر پرسێک:

❖ ئایا ژمارە بێخەوشەکان هەر هەموویان جووتن؟

تـا زیـاتر بـڕۆین، ئەوە مەودای نێـوان دوو ژمـارەی بـێخەوش زیاتر و زیاتر دەبێت.

Perfect Number	Positive Factors	Sum of all factors excluding itself
6	1, 2, 3, 6	6
28	1, 2, 4, 7, 14, 28	28
496	1, 2, 4, 8, 16, 31, 62, 124, 248, 496	496
8,128	1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 127, 254, 508, 1016, 2032, 4064, 8128	8,128

ئالگۆریتمی ئیقلید

Euclid's algorithm

ئـــالگۆریتم، لە ســـــادەترین پێناســـــە؛ بـــریتییە لە میتـــۆدی-شـــێوازی شـــیکارکردنی کێشـــەیەک بە پابەنـــد بـــوون بە هەنـــدێک ڕێســـای هەنگـــاو بە هەنگـــاو، کە بـــارێکە ڕێســـاکان دووبـــارە و چەنـــدبارە بەکاردەهێنـــدرێتەوە بـــۆ گەیشـــتن بە ویســـتێک (ئامـــانج). ئـــالگۆریتمی ئیقلیـــد، ئـــالگۆریتمێکی دێرینـــی زۆر لەمەوپێشە، کە بە نزیکەیی 300 ساڵ بەر لە زاین.

ئەم ئـــالگۆریتمە، بـــۆ دۆزیـــنەوەی گەورەتـــرین بەشـــدراوی هـــاوبەش (GCD-Greatest common divisor) لە نێـــوان دوو ژمـــارە، بەکاردێـــت. ئـــالگۆریتم، ســـەرەکترین شـــتە لە زانســـتی کۆمپیـــوتەر، کە تێـــدا ئـــامێرە ئەلکترۆنییەکـــان لەســـەری ڕۆنـــراون بـــۆ بەرهەم هێنـــانی دەرئەنجـــامی بەســـود. بە کـــورتی و پـــوختی، ئـــالگۆریتمەکەی ئیقلیـــد ئەوەیە : **گەورەتـــرین بەشـــدراوی هـــاوبەش لە نێـــوان دوو ژمـــارە، دەکـــاتە بەشـــدراوی هاوبەشـــی جیـــاوازی نێـــوان دوو ژمـــارەکە.** بەم شـــێوەیە دۆخەکە چەنـــدین جـــار دووبـــارە دەکـــرێتەوە تـــا لەکۆتـــایی دەبێـــتە "سـفر"، بـۆیە، ئەو ژمـارەی کە بـووە هـــۆی بەرهەم هێنـــانی ئەو ســـفرە، ئەوە دەبێـــتە گەورەتـــرین بەشـــدراوی هاوبەشـــی دوو ژمـــارە ڕەســـەنەکەی یەکەم؛ کە ویســـتمان گەورەتـــرین بەشـــدراوی هاوبەشـــیان بـــۆ بـــدۆزینەوە. گەورەتـــرین بەشـــداری هاوبەشـــی نێوان دوو ژمارەی وەک a و b بەم شێوەش دەنووسرێت:

گه‌وره‌ترین به‌شدراو= (a,b) . بۆ نمونه: $(12,8) = 4$ ، واته گه‌وره‌ترین به‌شدراوی هاوبه‌شی نێوان 8 و 12 بریتییه له 4. به‌هۆی ئالگۆریتمی ئیقلیدس، به‌و شێوه GCD ده‌دۆزینه‌وه بۆ ئه‌و دوو ژماره‌ی سه‌ره‌وه:

$$12 - 8 = 4 \rightarrow 8 - 4 = 4 \rightarrow 4 - 4 = 0$$

لێره ده‌بینین که له 4 − 4 گه‌یشتینه سفر، بۆیه GCD ی ئه‌و دوو ژماره‌یه (8 و 12)، بریتییه له 4.

FINDING THE GCD OF 585 AND 442

Simple version of Euclid's algorithm: 15 steps

585 − 442 = 143, so consider 442 and 143

442 − 143 = 299, consider 299 and 143

299 − 143 = 156, consider 156 and 143

156 − 143 = 13, consider 143 and 13

143 − 13 = 130, consider 130 and 13

(at this stage the answer is obvious, but subtracting 13 nine more times leads to ...)

13 − 13 = 0, so the GCD is 13

Standard version of Euclid's algorithm: 3 steps

$\frac{585}{442} = 1$ (remainder 143)

$\frac{442}{143} = 3$ (remainder 13)

$\frac{143}{13} = 11$ (no remainder)

so the process stops and 13 is the GCD.

ژمارە نارێژەییەکان

Irrational numners

ژمارە نارێژەییەکان، ئەو ژمارانەن کە ناتوانرێت بە شێوەی دابەشکردنی ژمارەیەکی تەواو بەسەر ژمارەیەکی تری تەواو (سفر نەبێت) بنووسرێت. بە واتایەکی تر: ئەو ژمارەیە کە ڕێژەیی نییە[22]. یاخود گەر هاتوو لە شێوەی ژمارەیەکی دەیی نوسرا، ئەوە ئەو بەشەی دوای فاریزە، واتە دەییەکە، ڕەنووسەکانی تا ناکۆتا هەر بەردەوام دەڕوات بە شێوازێکی نارێک. فراوانبوونە دەییەکەی ژمارەی نارێژەیی، هیچ شێوە سازییەکی خولگەیی دووبارەی تیادا نییە.

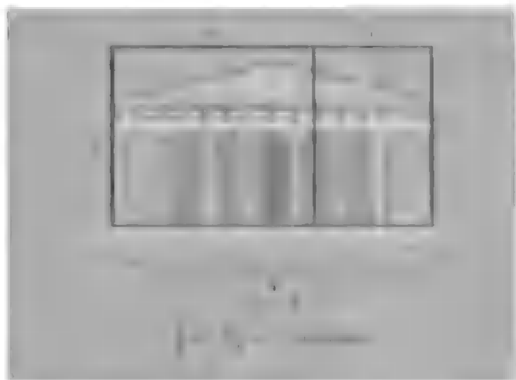
ژمارە نارێژەییەکان بە هەمان شێوەی ژمارە سروشتیەکان و ڕێژەییەکان، لەڕووی قەبارەوە ناکۆتان (قەبارە مەبەست لە ئەندازە نیە لێرەدا، بەڵکو مەبەست ئەوەیە ناکۆتا ژمارەی لەم شێوە بوونی هەیە)، واتە کاردینالی-ژمارەی دانەکانی ژمارە نارێژەییەکان ناکۆتایە. بەلام جیاوازە لە ژمارەی دانەکانی ژمارە سروشتیەکان و ڕێژەییەکان، بەمانایەکی تر، ژمارەی دانەکانی ژمارە نارێژەییەکان، گەورەترە لە ژمارەی دانەکانی ژمارە ڕێژەییەکان و سروشتیەکان، یان باشترە بڵێین: ڕاستە هەردووکیان ناکۆتا ژمارەیان تیادایە، بەلام ناکۆتایی نارێژەییەکان

---

[22] ئەو پێناسە هەندێک سەیر دەردەکەوێت: ژمارەی نارێژەیی، ئەو ژمارەیە کە ڕێژەیی نییە. شتێک هەیە کە ڕێگەمان پێ دەدات بەو شێوە پێناسەی ژمارە نارێژەییەکان بکەین، ئەویش ئەوەیە: $\mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}^c = \mathbb{R}$.

گەورەترە لە ڕێژەییەکان. نابێت جیاوازییەکی تری نێوان ژمارە ناڕێژەییەکانمان لە بیربچێت، ئەویش ئەوەیە: کە نەژمێردراون (non-countable) لە کاتێکدا ژمارە ڕێژەییەکان ژمێردراون (Countable).

لەناو ژمارە ناڕێژەییەکاندا، کۆمەڵێک ژمارەی زۆر ناسراو هەن، لەوانە : نەگۆڕی پای، کە بە π هێما دەکرێت، کە دەکاتە ڕێژەی نێوان چێوەی بازنە بۆ تیرەکەی. نەگۆڕی ئۆیلەر e. ڕێژەی زێڕین (Golden ratio)، یان ڕەگی دووجای دوو $\sqrt{2}$،[23] کە ئەمانە هەموویان ژمارەی ناڕێژەین.



ئەم وێنەیە، ڕێژەی زێڕین[24] دەتوێنێت.

[23] دەگێڕنەوە: ڕەگی دووجای دوو، یەکێک لە فیساگۆرسییەکان ئەم ژمارەی دۆزییەوە، وتی: ئەم ژمارەیە شتێکی سەیری هەیە، ئەویش ئەوەیە ناتوانرێت بە شێوەی کەرت بنووسرێت. لەبەر ئەوەی فیساگۆرسییەکان باوەڕیان بە ژمارە ناڕێژەییەکان نەبوو لە سەرەتادا، بۆیە چاویان لەو ئەندامەیان سوورکردەوە، تاکو لەگەڵ خۆیان بردییان بۆ گەشتێک. بەڵام لە گەشتەکە بەبێ ئەو گەڕانەوە!

[24] لە بیرکاری و هەروەها لە هونەرەکانیشدا، دوو بڕ لە تەک یەکترا، دەبنە خاوەنی ڕێژەی زێڕین کە نەگۆڕێکە لە بیرکاریدا کە بە نزیکەیی دەکاتە: 1.618 . (بلۆگی بیرکاری بۆ کورد)

ژمارەی جەبری و ژمارەی ناجەبری

Algebraic and transcendental numbers

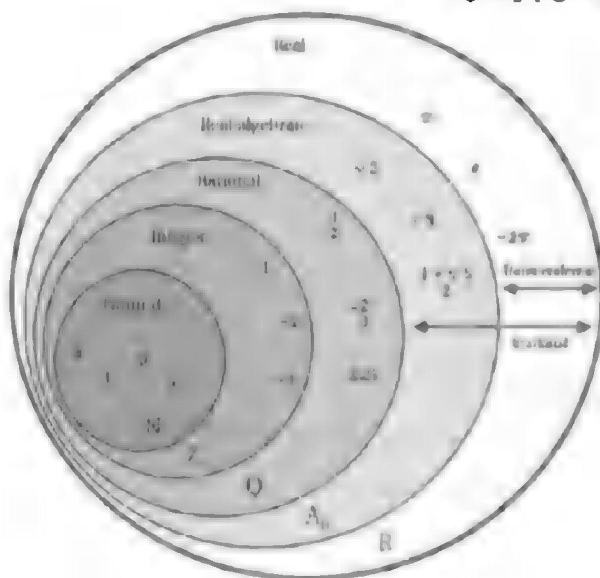
ژمـــارەی جەبـــری، ئەو ژمـــارانەن کە دەبـــنە شـــیکار (Solution) بـــۆ هاوکێشـــەیەک، کە کـــۆلکەی نەزانراوەکـــانی هاوکێشـــەکە ژمـــارەی ڕێـــژەین. ژمـــارەی نـــا جەبـــری، ئەو ژمـــارانەن کە نـــابنە شـــیکار بـــۆ ئەم جـــۆرە هاوکێشـــانە. لە ژمـــارە جەبرییەکیـــان وەک: $\sqrt{2}$ کە دەبێـــتە شـــیکار بـــۆ هاوکێشـــەی: $x^2 - 2 = 0$ ، لە کاتێـــک کە ڕەگـــی دووجـــای دوو ژمـــارەیەکی نارێژەییە، واتا ناتواندرێت بە شێوەی کەرتی $\frac{a}{b}$ بنوسرێت.

لە گەڵ ئەوەش، هەمـــوو ژمـــارە ڕێژەییەکـــان ژمـــارەی جەبـــرین، بەڵام بـۆ نارێژەییەکـان مەرج نیـیە. بەڵگە بـۆ ئەوەی کە هەمـوو ژمـارە ڕێژەییەکـان ژمـارەی جەبـرین، ئەمەیە: گریمـان ژمـارەیەکی ڕێژەیمـان هەیە: $\frac{a}{b}$ دیاریشـە ئەم کەرتە، شـــیکارە بـــۆ هاوکێشـــەی: $bx - a = 0$. وەک گوتمـــان ئەمە بـۆ هەمـــوو ژمـــارە نارێژەییەکـــان ڕاســـت نیـــیە. هەر بـــۆیە کـــارکردن لەگەڵ هاوکێشـــەکان، بـــۆ بیرکازیانەکـــان هەنـــدێ تـــاقەت پـــڕوکێنە و کـــاتی ئەوێ، چـــــــونکە ڕاوکـــــــردن لەم بـــــــابەتە ئاســـــــان نیـــــــیە. لە ژمـــــــارە ناجەبرییەکـــانیش، وەک: π ، کە نـــابێتە شـــیکار بـــۆ ئەو جـــۆرە هاوکێشـــانەی کە لەسەرەوە باسمان کرد.

مەســـەلەی ڕەگـــی دووجـــای دوو $\sqrt{2}$، لە ئەنجـــامی سێگۆشـــەی فیساگۆرســەوە ســەرئاو کەوت، کاتێــک، هەر یەکێــک لە تەنیشــت و بەرامــبەر 1 بێت، ئەوە بە پێی یاسایی فیساگۆرس، دەگەینە $\sqrt{2}$.[25]

$$1^2 + 1^2 = c^2 \rightarrow c^2 = 2 \rightarrow c = \sqrt{2}$$

ئەم هێلکــارییەی خــوارەوە، کــۆمەڵەی ژمــارە جیاوازەکــان دەنوێنێــت ، وە پەیوەنــدی نێوانیــان، واتە کــامە لە کــامە بــنەیە و، کــامە کــۆمەڵە لە هەموویــان گەورەتــرە یــان بچــوکترە، پیشــاندەدات. لەگەڵ ئەو دوو جــۆرە ژمــارەی باســمانکرد، دەبینــین کە دەکەونە کــوێ لە پەیوەنــدی کــۆمەڵەی هەموو ژمارەکان بەیەکەوە.



[25] وەرگێڕ.

پای

π

نەگــۆڕی پـــای π، بەر لە 4 هەزار ســـاڵ دۆزراوەتە و مرۆڤـــایەتی لەم ژمـــارەی ڕوانیـــووە و بەکـــاری هێنـــاوە. بەڵام بەکارهێنـــانی ئەو ژمـــارەیە، بەهـــاکەی ئەو شـــێوەی بەهـــای ئێســـتا نەبـــووە کە هەیە، بەڵکـــو ئەو نـــرخە، بە نزیکەیـــی جیـــاواز بـــوو لەوەی ئێســـتا زانـــراوە. پـــای، ژمـــارەیەکی نـــاچەبرییە وەک لە بـــابەتی پێشـــوو باســـکرا. بیرکاریزانەکـــانی بـــابلی کـــۆن، هەژمـــاری ئەو نەگۆڕەیـــان کـــرد، بەڵام بە شـــێوەیەکی ورد نەبـــوو. بابلییەکـــان چێـــوەی بازنەیـــان بە قەد ســـێ ئەوەنـــدەی تیـــرەی بازنەیـــان مەزەنـــدەکرد، واتە لەو ســـەردەمە، نرخـــی پـــای بریتیـــی بـــوو لە 3. بەڵام یەکێـــک لە ئاســـەوارەکان؛ تـــابلۆ قوڕینەکـــان لە نێـــوان (1900–1680) لە پـــێش زایـــن، ئەم ڕاســـتییە دەردەخـــات، کە یەکێـــک لە بابلییەکـــان، گەیشـــتە نرخێکـــی جیـــاواز تـــر لەو نـــرخەی پێشـــتر بـــۆی دانرابـــوو، ئەویـــش (3.125) بـــوو، ئەمەش دیســـانەوە نزیـــک بـــوونەیەوەکە لە نرخـــی ئێســـتای نەگـــۆڕی پـــای. لە دوای شارســـتانییەتی بابلییەکـــان، شارســـتانییەتێکی تـــر پەیـــان بەو ژمـــارەیە بـــردووە، ئەوانـــیش میصـــرییەکان بـــوون. میصـــرییەکان لە تـــوێژنەوە و وردبوونەوەیـــان لەو مەســـەلەیە، پایـــان بە 3.1605 مەزەنـــدەکرد. یەکەمـــین خەملانـــدنی تەواو، بـــۆ چەنـــد ڕەنووســـێک بـــۆ ئەم نەگـــۆڕە، لەســـەر دەســـتی ئەرخەمیـــدز بـــوو. ئەرخەمیـــدز یەکـــێکە لە بیرکـــاریزانە هەرە مەزنەکـــانی مرۆڤـــایەتی، کە لە نێـــوان ســـاڵەکانی 282-212 بەر لە زایـــن لە ســـیراکیوز ژیـــاوە. ئەرخەمیـــدز

هەژمـــاری نزیکەیـــی ڕووبەری بـــازنەی کـــرد بە بەکارهێنـــانی بیـــردۆزی فیســـاگۆرس، ئەویـــش لە دۆزیـــنەوەی ڕووبەری دوو 5 لای ڕێـــک (پۆلیگـــۆن-Polygon). چـــۆنییەتی کـــارەکەش بەو شـــێوە بـــوو: دانـــانی چەنـــدین پۆلیگـــۆن-چەنـــدلاک لە نـــاو بـــازنەکە. ئەرخەمیـــدز لەم ڕێـــگەیە پیشـــانی دا کە نرخـــی پـــای بە وردی دەکەوێـــتە نێـــوان دوو ژمـــارە، ئەوانـــیش: $3+\frac{1}{7}$ و $3+\frac{10}{71}$. بەم شـــێوە، پـــای بە نێـــو شـــەمەندەفەری مێـــژوو ڕۆیشـــتووە. ســـەبارەت بە هێمـــای پـــای، ئەم هێمـــایە، هێمـــایەکی گـــریکییە کە لە ســـاڵی 1700 بەکـــارهێنرا بـــۆ ئەو نەگـــۆڕە مەزنە! لە لایەن ویلیـــام جـــۆنیس (William Jones) دواتـــر ئەم دورشـــم و هێمـــایە گەیشـــتە قـــیمە لە لایەن بیرکـــاریزانی بە ناوبانـــگ "لیۆنـــارد ئـــۆیلەر". هەر ســـەبارەت بەم باســـە، بیرکـــاریزانێکی فەرەنســـی خەملانـــدنێکی بـــۆ ئەم ژمـــارەیە کـــرد لە ڕێـــگەی ئەگەرییـــەوە، هەروەهـــا ئەفســـانەی هینـــدیش "ڕامانووجـــان" لەو مەســـەلەیە میتـــۆد و قســـەی خـــۆی هەبـــوو.[26] لە ســـاڵی 2019 بە یـــارمەتی کۆمپیـــوتەر، توانـــدرا زیـــاتر لە 31 ترلیـــۆن ڕەنووســـی کەرتی (Decimal) پای بدۆزرێتەوە.

3.141[illegible]
9399375105820974944592307816406286208998628[illegible]
034825342117067982148086513282306647093844
[illegible]28481117[illegible]
38521105559644622948954930381[illegible]
6593344612847564823378678316527120190914564
856692346034861045432664821339360726024914
1273724587006606315588174881520920962829254
091715364367892590360011330530548820466521
[illegible]1609433057[illegible]
8611738193261179310511854807446237996274956
7351885752724891227938183011949129833673362
4406566430860213949463952247371907021798609
4370277053921717629317675238467481846766940
5132000568127145263560827785771342757789609
1736371787214684409012249534301465495853710
5079227968925892354201995611212902196086403
[illegible]1309960518707211[illegible]
[illegible]105973173281609631859502445955...

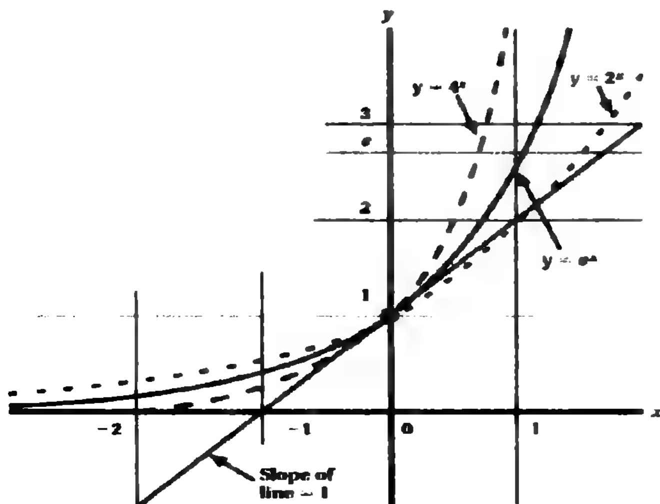
---

[26] ئەم بـــابەتەم پێشـــتر لە بلـــۆگی بیرکـــاری بـــۆ کـــورد (www.math4kurd.wordpress.com) بـــڵاو کـــردۆتەوە لە پەرتـــوکەکە بە کـــورتی باســـی لێکراوە، بۆیە منیش بە شتێک زیاتر باسم کردووە بۆ ئەوەی سەرنجڕاکێشتر بێت.

$e \approx 2.718$

ژمــارەیەکی نــاڕێژەیی و لە هەمانکاتــدا ژمــارەیەکی نــاجەبرییە. ئەم ژمـــارەیە گرنگییەکـــی ئێجگـــار زۆری هەیە و یەکـــێکە لە ســـەرەکیترین ژمارەکــان، کە لە زۆرێــک لە بــابەتە بیرکارییەکــان و تەنــانەت لە فیزیــا و زانســـتەکانی تــریش، بەکــاربەریی هەیە. نــرخەکەی بە نزیکــی دەکـــاتە 2.7182818284590452353602874. ئەم ژمـــارەیە ســـەقفی سروشـــتی شــیکردنەوە بیرکارییــانەیە، تەنــانەت بــۆ فیزیکزانەکــان و ئەنــدازیاریەکانیش، مــایەی خۆشــحاڵییە کە ئــیش لەگەڵ ئەم ژمــارەیە بــکەن، لەکاتێــک ئیشــکردن لەگەڵ بنچینەیەک بە تــوانی 10 یــان بنچینــەی 10 جــا بە هەر توانێــک، یــان e بە تــوانی ژمــارەیەک، گــرانییەک دروســت ناکــات. هەر لەم پرســە، لۆگــاریتم بە بنچینــەی e ، ناســێندراوە بە لۆگــاریتمی سروشــتی (Natural logarithm). بەهەمــــان شـــێوە π و e، کەلێــک دەبــڕین و پەیوەنــدییان پــێکەوە هەیە. نەگــۆڕی e تــاکە ژمــارەیە کە داتاشــراوەکەی لە تــوانی x (e^x) کاتێــک x گــۆڕاوێکە، هەر دەکــاتەوە خــۆی! ئەم ژمــارەیە گرنگییەکــی ئێجگــار زۆری هەیە لە بـــــابەتی ئەگەر (Probability) کە نوانـــــدنی هەیە لە شـــــێوەی زنجیرەیـــــی ناکۆتـــــا. لەگەڵ ئەوەش، e پەیوەنـــــدییەکی لەگەڵ π دا هەیە، لەبەر ئەوەی لە نەخشـــــە سێگۆشـــــەییەکان کە دەکرێـــــت بەهـــــۆی ئەم ژمــارانەوە بنوســرێت و گوزارشــتییان لــێ بکرێــت، یــاخود لە بــابەتی ژمــارە ئاوێتەکـــــان (Complex numbers). پـــــای π و e پـــــێکەوە لە هاوکێشـــەیەک کــۆدەبنەوە، هەر بەو هــۆیەش، نەخشـــە سێگۆشـــەییەکان زۆر جــار بەهــۆی ئەمــانەوە دەکرێــت بنووســرێت. هاوکێشــەیەکی زۆر جــوان لە

هەمـــبەر ئەو ژمـــارانە هەنە، ئەویـــش "هاوئەنجـــامی ئـــۆیلەری" پـــێ دەوترێـــت: $e^{i\pi} + 1 = 0$ ، کە بە جوانترین هاوکێشەی بیرکاری ناسێندراوە.



ئەم وێـــنەیە، روونکردنەوەیـــی ســـێ نەخشـــە دەنووێنێـــت، ئەوانـــیش نەخشەکانی:

$$y = 4^x \quad ، \quad y = 2^x \quad ، \quad y = e^x$$

لێـــرە پرســـیارێک دروســـت دەبێـــت، e بـــریتییە لە ژمـــارەیەک وەک ژمارەکـــانی تـــر، بـــۆچی نەخشـــەکانی تـــر بە بنچیـــنەی ژمـــارە و تـــوانی x داتاشـــراوەکەیان ناکـــاتەوە نەخشـــەکە خـــۆی، لەکاتێـــک ئەمە بـــۆ نەخشـــەی $y = e^x$ راستە؟[27]

[27] لە قۆنـاغی دووی زانکـۆ ئەو پرسـیارەم ۷ دروسـت بـوو، بە گەران و سـوڕان، وەلامەکەم دەست کەوت، پێم باش بوو هەمان پرسیارە ئاراستەی خوێنەری هێژا بکەم.

لۆگاریتم

Logarithms

لۆگاریتم، یەکێک لە گرنگترین یاساکانی بواری زانست، بەجۆرێک، دەکەوێتە ناو گرنگترین 17 هاوکێشەکان. لۆگاریتم وەک دەستەواژەیەکی بیرکاییانە، بە پێچەوانەی توان-هێز کاردەکات. بۆ نمونە: لۆگاریتمی 1000 بە بنچینەی 10 دەکاتە 3، واتە $10^3 = 1000$. ئێمە لە ڕێگەی لۆگاریتمەوە دەتوانین هێزی زەمین لەرزە -بومەلەرزە بزانین، جگە لە چەندین سودی زۆر گرنگی تر. بۆ نمونە: ئەگەر ژمارەیەکمان هەبێت بە توانی ژمارەیەک، واتە $a^n = x$ وە $a^m = y$ لەمەوش $a^n a^m =$ a^{n+m} دەستدەکەوێت، هەر ئەم دەستەواژەیە دەتواندرێت لەسەر شێوەی لۆگاریتم، واتە فۆرمی لۆگاریتم بنووسرێت:

$(a^n)^w = a^{nw}$ و یان $log(xy) = log(x) + log\,(y)$،

ئەمیش لە فۆرمی-شێوازی لۆگاریتم بریتییە لەو هاوکێشەیە: $log(x^w) = w\,log(x)$. ئەو یاسایانەی کە پێشتر بەکاردەهێندران بۆ سادەکردنەوەی هەژمارە گەورەکان پێش ئەوەی ئامێر و ئەژمێرە ئەلکترۆنییەکان پەیدا بێت، ئەوە بەهۆی دوو ڕاستەوە (Ruler) کە بە پارسەنگی لۆگاریتمی ناسراوە، ئەنجامدەدرا.

$$i = \sqrt{-1}$$

i ژمارەی ئاویتە- خەیالی یان ئاڵۆزیشی پێدەڵێن. i [28]کە بۆ نواندنی رەگی دووجای (1-) بەکاردێت. ئەم ژمارەیە لە ژیانی رۆژانە بەکەڵکی ژماردن نایەت، واتە ناتوانین بۆ کڕین و فرۆشتن بەکاری بێنین، هەر بۆیە ناسراوە بە ژمارە خەیاڵییەکان یان ئاویتەکان. چەمکی ژمارە ئاویتەکان، گرنگە و کۆمەکیمان دەکات لە شیکارکردنی هەندێک جۆری هاوکێشەی وەک : $x^2 + 1 = 0$ ، دیاریشە تەنیا رەگی دووجای (1-) واتە $\sqrt{-1}$ شیکارە بۆ ئەم هاوکێشەیە. کە دەشتوانین بەو شێوەی لێی بنۆڕین: $x^2 = -1$. پێشتر وتمان کە دووجای هەر ژمارەیەکی ئەرێنی (+) یان نەرێنی (-) هەمیشە ئەرێنییە (+)، بەڵام لێرە کەشەکە جیاوازە، ئەوەش واتا ناکرێت هیچ یەکێک لە ژمارە راستییەکان ببنە شیکار بۆ ئەم هاوکێشەیە، لەگەڵ ئەوەش، دوو نرخ شیکاری هاوکێشەکە دەکات، لەکاتێک دووجای ئەرێنی و نەرێنی نرخەکە دەکاتەوە نەرێنی یەک! واتە: $\left(\pm\sqrt{-1}\right)^2 = -1$ ، بەڵام ژمارە خەیاڵییەکان بەو شێوەیە ئاڵۆز و خەیاڵاوی نین کە بە رووکەش دیارە![29]

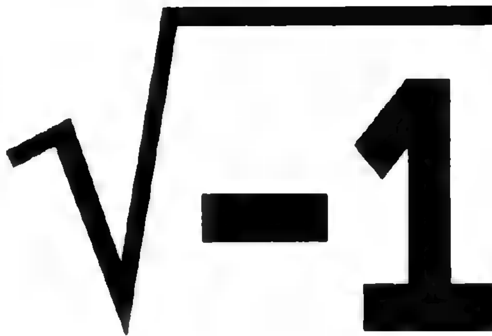
[28] بیرکاریزانی سویسری "لیونارد ئۆیلەر"، یەکەم کەس بوو هێمای i بەکارهێنا بۆ $\sqrt{-1}$.

[29] لە پەرتوکەکەی (جۆرج گامۆف) بە ناوی " یەک، دوو، سێ ... ناکۆتا" کە (حوسێن حوسێنی) کردویەتی بە کوردی، باس لە کێشەیەک دەکات لە ژیانی رۆژانە کە چارەسەرەکەی (دۆزینەوەکەی) پەیوەندی بە ژمارە ئاویتەکانەوە هەیە.

بۆ ئەوەی بە شـێوەی ئەنـدازەیی ژمـارەیەکی ئـاوێتە نیشـان بـدەین، ئەوە ڕاسـتەهێڵێک بەس نییە-یەک ڕەهەنـد، بەڵکـو پێوسـتمان بە ڕووتەخـتە، لەکاتێکـدا، بـۆ نواندنی ژمـارە ڕاسـتییەکان، تەنیـا هێڵێکـی ڕاسـتمان بەس بـوو، هۆکـــــــاری ئەمەش ئەوەیە، کە ژمـــــــــارە ئاوێتەکـــــــــان لە دوو بەش (Component) پێـک دێـت، بەشـی ڕاسـتی (Real part)، و بەشـی خەیـاڵی (Imaganry part)[30]. کە بەو شێوە دەنووسرێت:

$$x + iy$$

دەکرێـت هەمـوو ژمـارەیەکی ڕاسـتی وەک ژمـارەیەکی ئـاوێتە سـەیر بکەیـن، ئەویـش کاتێـک بەشـە خەیـاڵییەکەی سـفرە، واتە: $x + i0$ کاتێـک x ژمارەیەکی ڕاستییە.

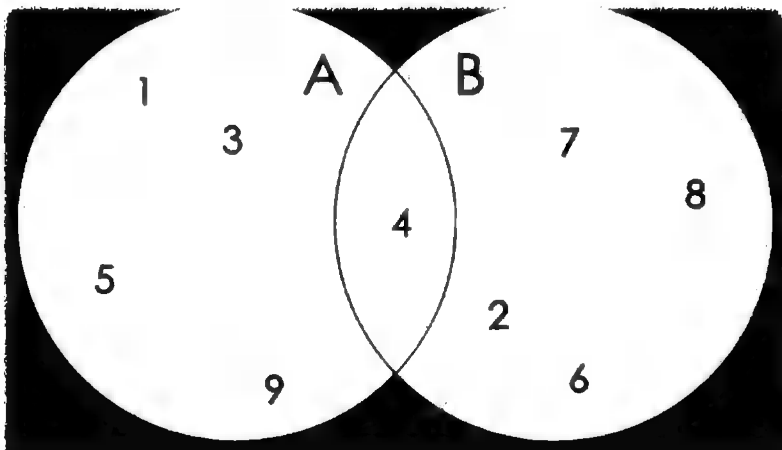


[30] چەمکـی "ژمـارەی ئـاوێتە" کاتێـک بەکـاردێنین کە ژمـارەکە بەشـی "ڕاسـتی و خەیـاڵی" هەبێـت، وەک: $2 + 3i$. بەڵام چەمکـی ژمـارەی "ئـاڵۆز یـان خەیـاڵی" کاتێـک بەکـاردێنین کە بەشی ڕاستی ژمارەکە سفر بێت، وەک: $3i$.

بەشی دووەم

کۆمەڵەکان

Sets



$A \cap B = \{4\}$

کۆمەڵەکان

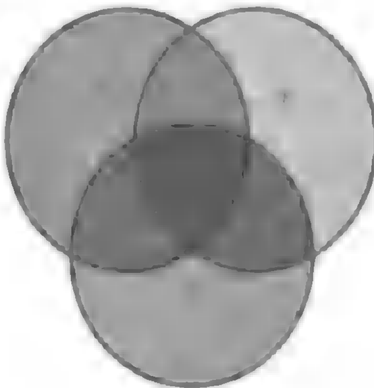
Sets

کۆمەڵە[31]، بە سانایی بریتییە لە کۆبوونەوەی شتانێک بەیەکەوە. ئەو شتانە کە لە ناو کۆمەڵەکەدان، دانەیان (Element) پێ دەوترێت. بیرۆکەی کۆمەڵە، بە یەکێک لە بابەتە هەرە بەپێز و گرنگەکانی سیمبولی-بیرکاری دادەندرێت، بەجۆرێک، زۆرێک لە بنچینە و تیۆرییە بیرکارییەکان، لەسەر ئەم بابەتە پایەکانی خۆیان بونیادناوە، تەنانەت سەرەکیترن لە ژمارەکان! کۆمەڵە لە ناویدا دەکرێت ناکۆتا (Infinite) یان کۆتادار (Finite) دانەی تێدا بێت، کە هەمیشە بە شێوەی داخراو ئاماژەی بۆ دەکرێت و دانەکانی ناو کۆمەڵەکە ئەگەر بینووسین دەخرێتە نێوان ئەو { } کەوانانە. ڕیزبەندی نووسینی دانەکان لە ناو ئەم کەوانانە، بایەخێکی وای نییە و خەسڵەتی کۆمەڵەکە و دانەکانی ناوی ناگۆڕێت و بەشێک نییە لە تایبەتمەندی کۆمەڵە، یان دووبارەی بوونەوەی دانەیەکیش کێشە نییە لە هەندێ دۆخدا. کۆمەڵەکان مومکینە دروستبکرێن لە کۆمەڵەکانی ترەوە. یەکێک لەو هۆکارانەی کە کۆمەڵەکان بە بابەتێکی بە نرخی دەزانین، لەبەر ئەوەیە گشتێتی دەپارێزێت و تیۆری لەسەر بینا دەکرێت، واتە خەت و خاڵی زۆرێک تیۆری دادەڕێژێت.

---

[31] لە بابەتێکی پێشوو باسی خێزانی ژمارەکانمان کرد. جیاوازی خێزان و کۆمەڵە ئەوەیە کە خێزانەکان ڕێسایەکیان هەیە بۆ دانەکانی ناوی، وەک کە خێزانی ژمارە جووتەکان و خێزانی ژمارە تاکەکان هەردووکیان لە ناو کۆمەڵەی ژمارە تەواوەکان بوونیان هەیە.

سەبارەت بە شتەکانی-دانە ناو کۆمەڵە، دەکرێت هەر شتێک بێت، ژمارە، هەسارەکان، درەختەکان، ئاژەڵەکان... بەڵام بەگشتی پێکهاتەکانی ناو کۆمەڵە، پەیوەندیدارن بەیەکەوە. دەکرێت دانەکانی ناو کۆمەڵەکە یاسایەکیان هەبێت. سەرەرای ئەمەش، هەندێک جار، ناو لە کۆمەڵەکان دەندرێت و ناوزەد دەکرێن، وەک: کۆمەڵەکانی کانتۆر (Cantor set). تیۆری کۆمەڵەکان، پتر دەچێتە خانەی فەلسەفەوە و خزمەت و قازانجی توێژینەوەی فەلسەفە دەکات، بە تایبەتی لە پرۆسەی لێکۆڵینەوە و ئەنجامگیری و گەیشتنە مەبەستدا، جگە لەوەی پەیوەندییەکی توند و تۆڵی بە بابەتی چەمک و بریار (حکم) دانەوە هەیە.[32]



کۆمەڵەکان بە پیتی گەورە-کەپیتەڵی ئینگلیزی هێما دەکرێن. دانەکانی ئاویشی بە پیتی بچوک-سمۆڵی ئینگلیزی هێما دەکرێت. زۆر جار رەمزێک-هێمایەکی تایبەتی بۆ دادەندرێت.

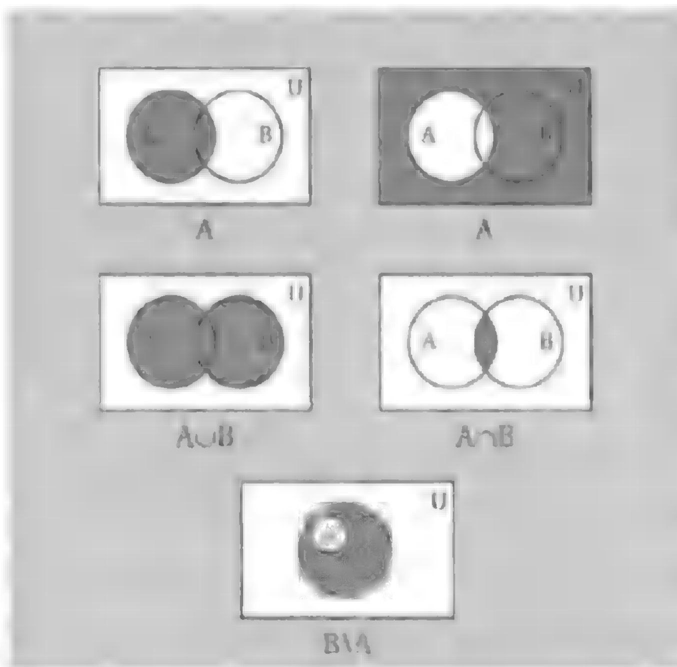
[32] لۆجیکی دوێنێ و ئەمرۆ. پ. د. حمید عزیز. ئاوەندی ئاوێر 2016.

پێکبەستنەوەی کۆمەڵەکان

Combining sets

وادانــێ دوو کۆمەڵەمــان هەیە، بەهــۆی ئەو دوو کــۆمەڵەیەوە دەتــوانین چەنــدین کــۆمەڵەی تــری هەمەچەشــن دروســت بکەیــن؛ بە بەکارهێنــانی کردارەکــانی تــایبەت بە کۆمەڵەکــان لەســەر ئەو دوو کــۆمەڵەیە. یەکەم کــردار هەمــانە، "یەکتربڕینــی دوو کــۆمەڵە" (Intersection). ئەگەر X و Y دوو کــۆمەڵە بــن، ئەوە یەکتربڕینــی ئەو دوو کــۆمەڵەیە بە زمــانی بیرکــاری بەو شــێوە دەنووســـرێت: $X \cap Y$ کە دەکــاتە هەمــوو ئەو دانــانەی کە لە هەدوو کـــــۆمەڵەکە دا هەیە، واتە دانە هاوبەشـــــەکان. کردارێکـــــی تــــر، ئەویـــــش "یەککــرتنە" (Union)، لە یەککــرتن، هەردوو کــۆمەڵەکە تــێکەڵ بەیەک دەبــن و دەبـــن بە یەک کـــۆمەڵەی گەورە، کە بە زمـــانی بیرکـــاری بەم شــــێوە دەنووســرێت: $X \cup Y$. بــارێکی ترمــان هەیە لە تیــۆری کۆمەڵەکــان، ئەویــش پێـــی دەوتـــرێ: کـــــۆمەڵەی بەتـــــاڵ (Empty set)، کە ئەم کـــــۆمەڵەیە ϕ یان { } هێمــا دەکرێــت، واتە هــیچ شــتێک لە نــاو کــۆمەڵەکە بــوونی نیــیە. چەمێکــی تــر هەیە پێــی دەوتــرێ: بەشــە-بــنە کــۆمەڵە (Subset)، بــنە کــۆمەڵە، ئەو کــۆمەڵەیە کە دانەکــانی لە کــۆمەڵەیەک وەرگیــراوە، دەشــێت بەشــێک لە دانەکــانی ئەو کــۆمەڵەی تێدا بێــت، یــاخود گشــت دانەکــانی ئەو کــۆمەڵەی تێدا بێــت. کــۆمەڵەی بەتــاڵ، بــنە کــۆمەڵەیە لە هەمــوو کــۆمەڵەیەک. چەمکێکــی ترمـــان هەیە پێـــی دەوتـــرێ کـــۆمەڵەی "تەواوکەر" (Complementary)، کــــۆمەڵەی تەواوکەر واتە ئەو دانـــانەی کە لەو کـــۆمەڵە نـــین، وەک: ئەگەر Y

مـــان هەبێـــت، ئەوە کـــۆمەڵەی تەواوکەر بە $\bar{Y}$ یـــان Y^c هێمـــا دەکرێـــت. ئەگەر Y بـــنە کـــۆمەڵە بێـــت لە X ، ئەوە پەیوەنـــدی تەواوکەری Y بەو شـــێوە دەنوســـرێت: X/Y کە دەکـــاتە کـــۆمەڵەی هەمـــوو ئەو دانـــانەی لە X هەیە بەڵام لە نـــاو Y نیـــیە. لەم وێـــنەی خـــوارەوە U دەبینـــین، U بـــریتییە لە : تێکـــڕای جیهـــان (Universal set)، کە هەمـــوو شـــتەکان-دانەکـــان دەگرێتەخـــۆی. لەو وێـــنەی خـــوارەوە A و B بەیەکەوە تێکـــڕای جیهـــان پێکدەهێنن.

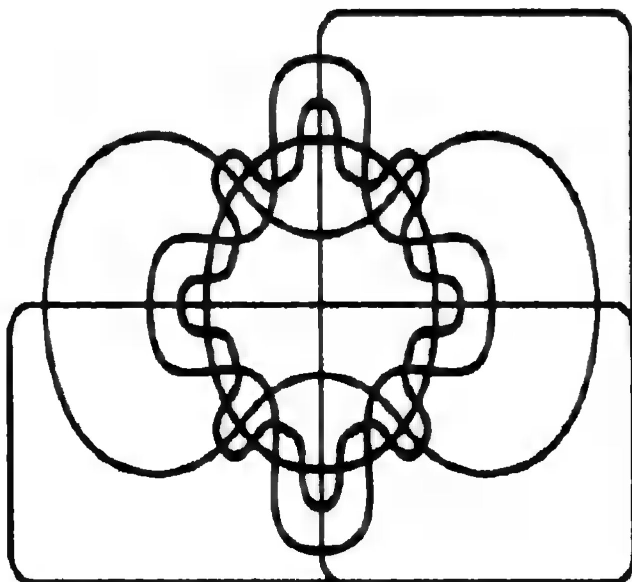


هێڵکارییەکانی ڤن

Venn diagrams

هێڵکارییەکـــانی ڤـــن، بەگشـــتی بـــریتین لە هێڵکـــارییەک هەر وەک هێڵکارییەکـانی تـر، کە بەزۆری بەکاردێـت بـۆ وەسـفکردنی پەیوەنـدییەکانی نێـوان کۆمەڵەکـان. لە سـادەترین شـێوەدا، بـازنە-پـۆپکە (Disk) بەکاردێـت بـۆ نوانـدنی هەر کـۆمەڵەیەک، کە یەکتربڕینـی پۆپکەکـان، یەکتـر بڕینـی کۆمەڵەکـان دەنوێنێـت، وەک لە بـابەتی پێشـوو بینیمـان. بەکارهێنـانی هێڵکـاری لەو شـێوە بـۆ دەربڕینـی پەیوەنـدییە جیاوازەکـانی نێـوان پێشـنیازە فەلسـەفییەکان یـان کـۆمەڵە جیاوازەکـان بەکارهـاتووە و بەکاردێـت. ئەم بـابەتە لە لایەن لـۆجیکزان و فەیلەسـوف "جـۆن ڤـن" (John Venn) لە ساڵی 1880 بە فۆرمولە کرا.

(ڤـن) خـۆی ئامـاژەی پێیانـداوە، هەروەک بـازنە ئۆیلەرییەکـان (Eulerian circles)..... . بەکارهێنـانی هێڵکـاری ڤـن بـۆ سـێ کـۆمەڵە، ڕێگـایەکی کلاسـیکی هەیە بـۆ نیشـاندانی هەمـوو پەیوەنـدییە ڕێتێچووەکـان. بەڵام بـۆ زیـاتر لە سـێ کـۆمەڵە، ئەوە ڕێکخسـتنی یەکتربڕینەکـانی کۆمەڵەکـان ئـاڵۆز و سـەخت دەبێـت. ئەو هێڵکـارییەی خـوارەوە، پەیوەنـدی نێوان شەش کۆمەڵەی جیاواز نیشاندەدات.



تاکە ڕێتێچوو بۆ نیشاندانی شەش کۆمەڵە بەهۆی هێڵکاری ڤن.

پارادۆکسی سەرتاشەکە

The barber paradox

پارادۆکس، لە سادەترین پێناسەدا؛ بریتییە لەو دەقەی کە خۆی دژی خۆی دەوەستێتەوە و، ئەنجامەکەی لە ڕووی لۆجیکییەوە دانپێدانراو و جێگای قبوڵ نییە. لە ساڵی (1901) بیرکاریزان و لۆجیکزان و فەیلەسوف 'بێتراند ڕاسڵ'[33] ئەو پاردۆکسەی بەکارهێنا بۆ ئەوەی هەندێ کەم و کوڕی لە تیۆری کۆمەڵە سەرەتاییەکان دەربخات.

پارادۆکسەکە دەڵێت: لە گوندێک، هەموو پیاوەکان دەبێت خۆیان سەری خۆیان بتاشن، یانیش دەبێت سەرتاشی (حەلاق-دەلاک) گوندەکە سەریان بتاشێت. سەرتاشی گوندەکە بانگێشەی ئەوە دەکات کە؛ تەنیا سەری ئەو پیاوانە دەتاشێت کە خۆیان سەری خۆیان ناتاشن. باشە کێ سەری سەرتاشەکە دەتاشێت؟

پارادۆکسەکە دووچاری پرسیارێکی جدیمان دەکاتەوە، ئەویش ئەگەر سەرنجی بدەین؛ کۆمەڵەیەک هەموو ئەو بنە کۆمەڵانەی تێدایە کە خۆیان وەک دانەیەک نین. ئەو کۆمەڵەیە دەبێتە دانەیەک لە خۆی (مەبەست لە سەرتاشەکەیە)؟ چارەسەری خێرا ئەوە بوو کە بۆ ناکۆکی

[33] بێرتراند ڕاسڵ (1872-1970) فەیلەسوف، لۆجیکزان و بیرکاریزانی بەریتانی. یەکێکە لە درەوشاوەترین فەیلەسوفەکانی فەلسەفەی خۆرئاوا، کە لە ماوەی ژیانی پتر لە 45 پەرتوک و چەندین وتاری نووسی. زیاتر بە شاکاری'بنەماکانی بیرکاری' ناسراوە. لە هەمان کاتدا، براوەی خەڵاتی 'نۆبڵە' لە بواری ئەدەبیات.

لەم شێوەیە، پێویستە تیۆری کۆمەڵە سنووردار بکەن بە زنجیرەیەک یاسا و بەڵگەنەویست، پاشان دروستکردنی پلە بەندیی کۆمەڵەکان، کە ئەمەش ڕێگەدەدات دانەکان بکەونە کۆمەڵەی سەرووخۆیان کە لە پلە بەندییەکەدان، لەگەڵ ئەوەش، ڕژێمی بەڵگەنەویسی تیۆری کۆمەڵەکان چووە ژێر بارییەوە.

ئەگەر سەرتاشەکە سەری خۆی بتاشێت، ئەوە ئەو بانگێشەیەی خۆی کردبووی، درۆ دەردەچێت. ئەگەریش سەرتاشەکە سەری خۆی چاک نەکات، ئەوە بە پێی بانگێشەکە دەبێت سەری خۆی چابکات، بەڵام دیسان ئەگەر چاکی بکات، ئەوە بانگێشەکەی درۆ دەردەچێت... واتە پرۆسەکە لە نێوان چاکردن و چاکنەکردن دەمێنێتەوە و ئاکامی نییە.



Cardinality and countability

ژمارەی دانەکان و شیاوی ژماردن

ژمـــارەی دانەکـــانی (Cardinility) نـــاو کـــۆمەڵەیەکی کۆتـــادار (Finite) *A* بە شـــێوەی |A| دەنوســـرێت، کە بـــریتییە لە ژمـــارەی دانەکـــانی نـــاو کـــۆمەڵەکە (دانەی دووبـــارە هەژمـــار نیـــیە)، واتە کـــۆمەڵەیەکی وەک A چەنـــد دانەی تێـــدایە. دوو کـــۆمەڵە ئەگەر هـــاتوو یەک بەرامـــبەر یەک بـــوون (one-to-one)، ئەوە پێـــان دەوتـــرێن "هەمـــان ژمـــارەی دانەیـــان هەیە" کاتێـک بتوانـدرێت هەر دانەیەکـی دوو کـۆمەڵەکە بەجۆرێـک جـووتبکرێن، بە شـــێوەیەک کە: بـــۆ هەر دانەیەک لە کـــۆمەڵەی یەکەم، دانەیەک هەبێـــت لە کـۆمەڵەی دووەم، کە پـێکەوە دەســت لەملانـبن. کـۆمەڵەی ژمێـردارو-شـیاوە ژمـــاردن (Countable)[34] ئەو کـــۆمەڵانەن کە دانەکـــانی نـــاوی دەتـــوانین بەهـۆی ژمـارە سروشـتییەکان نـاوزەد بکەیـن. واتـا دانەکـانی نـاو کـۆمەڵەکە بە شـێوەی خشـتەیەک (list) بنووسـین و بە ژمـارە سروشـتییەکان ناویـان لـێ بنـێن، لەگەڵ ئەوەش، خشـتەکە دەکرێـت ناکۆتـا بێـت. بە بیرکاریـانە، کـــۆمەڵەیەک؛ ژمێـــردراوە ئەگەر هـــاتوو توانییمـــان دانەکـــانی نـــاوی "یەک بەرامـبەر یەک" لەگەڵ بەشـێک لە کـۆمەڵەی ژمـارە سروشـتییەکان بنووسـین. ئەمەش هەنـدێ ئەنجـامی سـەمەرەمان دەداتـێ، بـۆ نمـونە: دەکرێـت بـنە

---

34 ئەم بـابەتە لە تیـۆری پێـوان (Measure theory) گرنگـی هەیە، لەگەڵ ئەوەش هەر کـۆمەڵەیەک ژمێـردراو بێـت، ئەوە پێـوانەی ئەو کـۆمەڵەیە دەکـاتە سـفر، بـۆ نمـونە: پێـوانەی کۆمەڵەی ژمارە ڕێژەییەکان دەکات سفر.

کۆمەڵەیەک لەگەڵ کۆمەڵەکە خۆی، هەمان ژمارەی دانەیان هەبێت، یان کۆمەڵەی هەموو ژمارە جووتەکان هەمان ژمارەی دانەیان-قەبارە هەیە لەگەڵ کۆمەڵەی ژمارە تاکەکان، ئەویش هەمان ژمارەی دانە-قەبارەی هەیە لەگەڵ کۆمەڵەی ژمارە سروشتییەکان. هەموو ئەمانە پیان دەوترێت کۆمەڵەی ناکۆتای ژمێردراو (Infinite countable set)[35] . بە نمونەیەک ئەمە زیاتر ڕۆشن دەکەینەوە: وادانێ ناکۆتا پارەی تاک هەزاریمان هەیە، لەبەر ئەوەی هەر تاک هەزارییەک ژمارەیەکی تایبەت بە خۆی هەیە و هیچ دوو تاک هەزاری هەمان ژمارەیان نییە، ئەوە دەتوانین ئەو تاک هەزارییانە بژمێرین یان سەفت-ڕیز بکەینەوە بە هۆی ئەو ژمارەی کە لەسەر تاک هەزارییەکان هەیە، لە کاتێک ئەگەر بچوکترین ژمارەی سەر تاک هەزارییەک 5567 بێت، ئەوە ئێمە لەگەڵ 1 دەبەستینەوە، پاشان ئەگەر دوای ئەم ژمارەیە، بچوکترین ژمارە 5569 بێت ئەوە بە 2 دەیبەستینەوە... . ئەو نووسینە لێرە بە مانای بەهای ڕووت (Absulte value) نایەت، ئەگەر لە نێوان ئەم هێمایە | | پیتی کەپیتەڵ یان کۆمەڵە نووسرا، ئەوە مەبەست لێی زانینی ژمارەی دانەکانی ناو کۆمەڵەکەیە.

|A|

[35] کاتێک دوو کۆمەڵەی ناکۆتا لەگەڵ یەکتر بەراورد دەکەین، شتی سەیر دێتە ئاراوە، وەک: کام ناکۆتا گەورەترە؛ ناکۆتای کۆمەڵەی ژمارە سروشتییەکان یان ژمارە جووتەکان؟ بۆیە لە پرسیارێکی لەم شێوە، ئەو وتە فەلسەفییە باوەی کە دەیگوت: 'هەمەکی لە هەندەکی گەورەترە' بە هەڵەخرایەوە!

هوتێلەکەی هیلبێرت

Hilbert's hotel

هوتێلەکەی هیلبێرت[36]، بیرۆکەیەکی جوان و ناوازەیە، کە لە لایەن هیلبێرت خۆی داهێندرا سەبارەت بە "کۆمەڵە ژمێردراوە ناکۆتاکان". بیرۆکەکە وا پیشان دەکات کە ئەگەر هوتێلێکمان هەبێت، ئەو هوتێلە ناکۆتا ژووری تێدا بێت (هوتێلکە کۆمەڵەکە دەنوێنێت، وە ژوورەکانی ناوی؛ دانەکانی ناو کۆمەڵەکە دەنوێنێت). ژوورەکانی ناو کۆمەڵەکە ناکۆتان، هەر ژوورەک لە ژمارە یەکەوە ژمارە (Lable) کراوە 1،2،3،... بەم شێوە کە گشت ژوورەکان میوانی تێدایە، پاشان میوانێکی نوێ دێت بۆ هۆتێلەکە و داوای ژوورێک دەکات، خاوەن هوتێلەکەش داوا لە کەسی ژووری ژمارە 1 دەکات بچێتە ژووری ژمارە 2، وە کەسی ژووری ژمارە 2 بچێتە ژووری ژمارە 3، بەم شێوە بۆ ئەوانی تریش،

---

[36] دەیڤید هیلبێرت (1862 – 1943) ماتماتیکناسی گەورەی ئەلمانی و کەسایەتیەکی سەیر. رابەری ڕێبازی فەلسەفی فۆرمالیزم لە ماتماتیکدا کە دەڵێت: ماتماتیک تەنها زادەی ئەقڵی مرۆڤە و هیچی تر، بە پێچەوانەی قوتابخانەی ئەفلاتونی (یان ریالیزم) کە دەڵێت ماتماتیک بونی سەربەخۆی خۆی لە دەرەوەی مرۆ هەیە. یەکێکە لە پێشڕەوانی نوێکردنەوەی جیۆمەتری. چەندەها بەدیهی دارشت بۆ ئەوەی بیسەلمێنێت کە سیستەمێکی فۆرمالیستیکی لە ماتماتیکدا هەیە، کە بە کورتی دەڵێت لە سیستەمی بەدیهی سەرەتایی ماتماتیکدا دەشێت ڕاستی ئەم بەدیهیانە بسەلمێنرێن. بەلام لە ساڵی 1931 ماتماتیکناسی تەمەن بیست و پێنج ساڵ، کورت گۆدێل توانی سیستەمەکەی هەڵوەشێنێت و سەلماندی کە هەندێک بەدیهی لە ماتماتیکدا هەن کە هەرگیز ناتوانرێت بسەلمێنرێن کە هەڵەن یان ناتوانرێت بسەلمێنرێن کە ڕاست نین. هیلبێرت بە یەکێک لە ماتماتیکناسە چالاکەکانی چەمکی ناکۆتا هەژمارد دەکرێت و زۆر بە پەرۆشەوە بانگەوازی بۆ کردووە و بەرگری لە کانتۆر کردووە. (شێرکۆ ڕەشید قادر)

ئیتر لە ئەنجام ژووری ژمارە 1 بۆ میوانە تازەکە چۆڵ دەبێت و تیدا نیشتە جێ دەبێت. ئەو پرۆسەی گواستنەوەیە بە بیرکارییانە بەو شێوە دەردەبڕێت: کەسی ژووری N دەچێتە ژووری $N + 1$. ئەم بیرۆکەی هیلبێرت ئەوە دەردەخات کە بە زیاد کردنی دانەیەک بۆ کۆمەڵەیەکی ژمێردراو، هەر بە ژمێردراوی دەمێنێتەوە، بەلام دەشێت ئەم کۆمەڵەیە جیاواز بێت لەگەڵ کۆمەڵەی پێش میوانە نوێیەکە. ئەم بیرۆکەیەی هیلبێرت[37] تا ئیستاش مشت و مڕی زۆر لەسەرە، کە دەرگای چەندین پرسیاری لە ڕووی هزرمەندان و بیرکاریزانان کردەوە.



[37] ئەم بیروکەیەی دەیڤید هیلبێرت نیشانی دا کە دوو کۆمەڵەی ناکۆتا، لەگەڵ ئەوەی بە ڕووکار وادەردەکەوێت کە جیاوازن، بەلام هاوتای یەکترن. ئەمەش بیرۆکەیەک بوو کە پیشانی دا دەکرێت: هەندەکی یەکسان بێت بە هەمەکی!

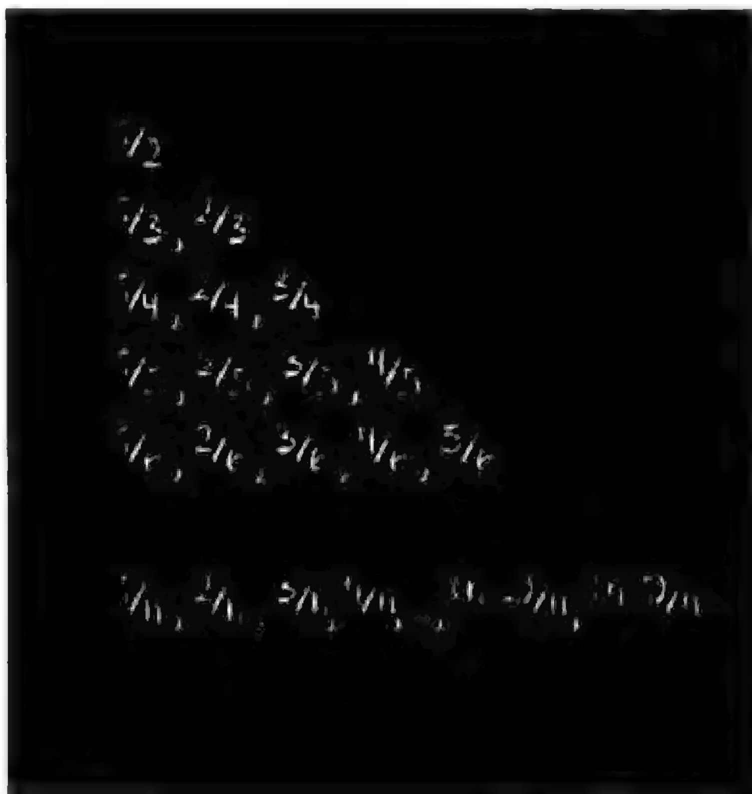
ژماردنی ژمارە ڕێژەییەکان

Counting rational numbers

لەکاتێکدا کە هەموو کۆمەڵە زۆر گەورەکان ژمێردراو نین، بەڵام کۆمەڵەی زۆر گەورەش هەن کە ژمێردراون. مەبەستی ئێمەش لەو کۆمەڵەیە؛ بریتییە لە کۆمەڵەی ژمارە ڕێژەییەکان (Rational numbers). ژمارە ڕێژەییەکان ئەو ژمارانەن کە لە ڕێژەی نێوان دوو ژمارە دروست دەبن $\frac{a}{b}$ کاتێک $(b \neq 0)$.

دەتوانین ئەم ڕاستییە بسەلمێنین تەنیا بە وردبوونەوەمان لە ژمارە **ڕێژەییەکانی نێوان سفر و یەک**. ئەگەر ژمارە ڕێژەییەکانی نێوان سفر و یەک ژمێردراو بێت، ئەوە دەبێت توانای ئەوەمان هەبێت کە لە بچوکەوە بۆ گەورە ڕیزیان بکەین. نابێت ئەو ڕاستییە لە بیر بکەین، کە لە نێوان هەردوو ژمارەیەکی ڕێژەیی، ژمارەیەکی تری ڕێژەیی هەیە (وەک چۆن لە نێوان هەر دوو ئەستێرەیەک، ئەستێرەیەکی تر هەیە)، بۆیە ئێمە ناتوانین تەنانەن یەکەم و دووەم ژمارەی ئەو خشتەیە بنووسین! بەڵام پرسیارەکە ئەوەیە، بە چ ڕێگایەک ئەتوانین ئەمە بکەین؟ لە کاتێک کە دەڵێین ئەو کۆمەڵەیە ژمێردراوە؟ یەکێک لە ڕێگا چارەکان ئەوەیە ئەو ژمارانە ڕیز بکەین بە پێی ژێرەکەیان (Divisor)، پاشان بە پێی سەرەی (Divided) کەرتەکان. لەگەڵ ئەوەش، هەندێ باری دووبارە دروست دەبێت لەم نزیکبوونەوەیە، بەڵام هەر ژمارەیەکی ڕێژەیی لە نێوان سفر و

یەک، مومکینە یەک جار دەرکەویت لەم خشتەیە. وەک لەم خوارەوە چۆنییەتی ڕیزکردنی ژمارەکان خراوەتە ڕوو.



لە کۆمەڵە ژمێردراوەکان، شتێکی سەرنج ڕاکێش هەیە، ئەویش ئەوەیە کە هەر کۆمەڵەیەک ژمێردراو بێت (Countable)، ئەوە پێوانەکەی دەکات سفر (Measure of zero).

کۆمەڵە چڕەکان

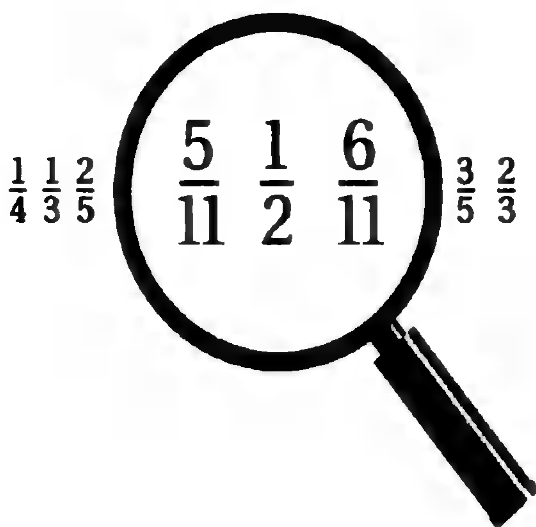
Dense sets

چڕێتی-خەستی، یەکێک لەو تایبەتمەندییانەی کە تێدا وەسفی پەیوەندی نێوان کۆمەڵەیەک و بنە کۆمەڵەکانی دەکات، یانیش وەسفی چڕی دانەکانی ناو کۆمەڵەیەک دەکات، ئەمەش کاتێک تێگەیشتنێک هەیە لە دووری دانەکانی کۆمەڵەکە. لە بابەتەکانی پێشوو، باسێکمان لەوە کرد کە هەندێ کۆمەڵە دانەکانی؛ توانای ژماردنی هەیە و هەندێک نییەتی، لەگەڵ ئەوەش، لە هەردوو باردا کۆمەڵەکان ناکۆتان. لێرە مەبەستمان لەچڕی-خەستی کۆمەڵەکان ئەوەیە: کۆمەڵەیەکی ناکۆتای وەک کۆمەڵەی ژمارە ڕێژەییەکان (Rational numbers) کە کۆمەڵەیەکی زۆر گەورەیە و لە هەمان کات کۆمەڵەیەکی زۆر چڕ و پڕە! لە کاتێک کە ئەم کۆمەڵەیە بەشێکە لە کۆمەڵەی ژمارە ڕاستییەکان (Real numbers).

کۆمەڵەیەک A پێی دەوترێن چڕ لە کۆمەڵەیەکی تر B، ئەگەر کۆمەڵەی A لە کۆمەڵەی B بنە بێت و، هەر دانەیەک لە کۆمەڵەکە A لە کۆمەڵەکە گەورەکەش B دانە بێت وەیان زۆر نزیک بێت لە یەکێکیان، بۆ هەر دانەیەکی لە کۆمەڵە گەورەکە B، دەتوانین دوورییەکی (مەودایەکی زۆر بچوک) دەست نیشان بکەین کە لە سفر گەورەتر بێت، پاشان دۆزینەوەی دانەیەک لە کۆمەڵەکەی یەکەم A بە پێی ئەو دوورییەی لە دانەکە.

بـۆ سـەلماندنی ئەوەی کە کـۆمەڵەی ژمـارە ڕێژەییەکـان چـڕ و پـڕە لە نـاو کـۆمەڵەی ژمـارە ڕاسـتییەکان. ئێسـتا دوورییەکـی $d > 0$ دەسـت نیشـان دەکەیـن لەگەڵ ژمـارەیەکی ڕاسـتی وەک y، بـۆیە ئێسـتا دەتـوانین بیسەلمێنن کە هەردەم ژمارەیەکی ڕێژەیی x هەیە لە نێوان y و d دا.

جیـا لەمەش، هەر بەو بیـرۆکەیە دەتـوانین بیسـەلمێنین کە لە نێـوان هەر دووژمـارەیەکی ڕێژەیـی، هەر چەنـد زۆر لێـک نـزیکیش بـن، ئەوە ناکۆتـا ژمارەی تر لە نێوانیاندا هەیە[38].



38 قوتابیـانی بەشـەکانی بیرکـاری ئەم بـابەتە لە وانەی (Mathematical Analysis - شیکردنەوەی بیرکارییانە) دەخوێنن.

کۆمەڵە نەژمێردراوەکان

Uncountable sets

کــۆمەڵە دانەی نەژمێــردراو-نەژمێردراوەکــان ئەو کــۆمەڵە ناکۆتانــان کە لە توانــادا نیــیە دانەکــانی نــاوی ڕێکبخــرێن بە شــێوەکی ڕێــک. ئەم بــابەتەش ئەوە دەگەیەنێــت کە دوو جــۆر لە کــۆمەڵەی ناکۆتامــان هەیە، ئەوانــیش کــۆمەڵەیەک کە ژمێــردراون و کــۆمەڵەیەک کە نەژمێــردراون. لە هەردوو جـۆر، دیســانەوە چەنــدین جــۆری جیاوازمــان هەنە. چــۆن دەتــوانین ئەو بســەلمێنین کە کــۆمەڵەیەک نەژمێــردراو، (Uncountable)؟ لە ســاڵی 1891 بیرکــاریزانی ئەڵمــانی "جــۆن کــانتۆر"[39] بە هــۆی شــێواز-میتــۆدی دژەیەک، ســەلماندی کە ژمــارە راســتییەکانی نێــوان ســفر و یەک نەژمێــردراوە. ئەگەر ژمێــرداروو بێــت، ئەوە وا دادەنــێن کە ناکۆتــایە، بەڵام لە خشتەیەکی (List)ی ژمێردراو.

---

[39] جــۆرج کــانتور(1845 – 1918) ماتماتیکناســی گەورەی ئەڵمــانی کە تیــۆری ســێتی دۆزیــیەوە و تــوانی مانــایەک بە پرســی ناکۆتــا لە ماتماتیکــدا و بە تــایبەت چەمکــی ژمــارە پەیژەییەکــان (transfinite numbers) ببەخشــێت کە زۆربەی ماتماتیکناســانی دوای خــۆی کــۆک بــوون لەســەری. هەروەهــا تــوانی ناکۆتــا بکــاتە چەنــد پۆلێــک، ئەوانەی کە دەژمێــردرێن و ئەوانەی کە نــاژمێردرێن. ئەو ناکۆتــایەنەی لە ناکۆتــایەکی تــر گەورەتــرن. ســەرەتا چــووە زانکــۆی بەرلــین و لەوێ لە ژێــر سەرپەرشــتی لیۆنــارد کــۆنیکەر کەوتە خوێنــدنی تیــۆری ژمــارەیی و دوایــی زۆر بە ســەختی ڕکــابەری کــرد. لای کــانتور " لە ماتماتیکــدا هــونەری پرســیارکردن بەهــادارترە لە شــیکارکردنی پرســیارەکان." ئەم پیــاوە مەزنە، بە داخەوە هــیچ ماتماتیکناســێک نە ئامــادە بــو یــارمەتی بــدات و نە بــاوەڕی پــێ بکــات، هەر بــۆیەش پرســی ناکۆتــا و تیــۆری ســێتەکانی بــردە لای تیولۆژیســتەکان و هەســتیکرد کە ئەوان زیــاتر لێــی تێدەگەن. (شێرکۆ ڕەشید قادر).

بــۆیە ئەگەر کــۆمەڵەیەک، ناکۆتــا بێــت و ژمێــردراو بێــت، ئەوە بەو شێوەی خوارەوە دەتواندرێت دانەکانی بنووسرێت:

$$0.a1,a2,a3,a4,\ldots$$

کاتێـک هەر یەک لە a_k ژمــارەیەکی سروشــتییە لە نێــوان ســفر بــۆ 9. کــانتۆر بەرپەرچــی ئەوەی دەســتەواژەیەی ســەرەوەی دایەوە، کاتێــک پیشــانی دا کە هەمیشــە دەتــوانین ژمــارەیەکی راســتی لە نێــوان "ســفر و یەک" بدۆزینەوە کە ئەو ژمارەیە ناکەوێتە ناو خشتەکە (list).

$$\begin{array}{ccc}
\mathbf{N} & \leftrightarrow & \textit{reals in } (0,1) \\
1 & \leftrightarrow & .835987\ldots \\
2 & \leftrightarrow & .250000\ldots \\
3 & \leftrightarrow & .559423\ldots \\
4 & \leftrightarrow & .500000\ldots \\
5 & \leftrightarrow & .728532\ldots \\
6 & \leftrightarrow & .845312\ldots \\
\vdots & & \vdots \\
n & \leftrightarrow & .r_1 r_2 r_3 r_4 r_5 \ldots r_n \ldots \\
\vdots & & \vdots
\end{array}$$

باشــــە ئەمە چــۆن؟! ئەگەر بێــت و ژمـــارەیەکی دەیـــی بنووســـین بە شـێوەیەک کە ژمـارەی یەکەمـی جیـاواز بێـت لەگەڵ ژمـارەی یەکەمـی خشـتە، وە ژمــارەی دووەمــی کەرتەکە جیــاواز بێـت لە ژمــارەی دووەمــی کەرتــی خشـــتەکە،... بەم شـــێوە دەگەیـــنە ژمـــارەیەک کە لەو خشـــتەیە نیـــیە کە گریمانمان کردووە.

بیـرۆکەکەی هێڵبێـرت ئەوەیە: لەگەڵ نـاوزەڕکردنی ژمـارە ڕێژەییەکـان بە ژمـــارە سروشـــتییەکان، ئەوە ژمـــارە سروشـــتییەکە چەنـــد بێــت، ئەوە دەچێـت کـار لەو خـانەیە (دەیـیەکە) دەکـات بە جۆرێـک کە جیـاواز بێـت لە پـێگەی ئەو کەرتە لە خشـتەکە، کە لە ئەنجـام ژمـارەیەک دروسـت دەبێـت نـــاکەوێتە ئەو خشـــتەیەی کە گریمـــانی کـــردووە. ئەمەش واتـــا ژمـــارە ڕاستییەکانی نێوان سفر و یەک نەژمێردراوە.

کۆمەڵەکانی کانتۆر

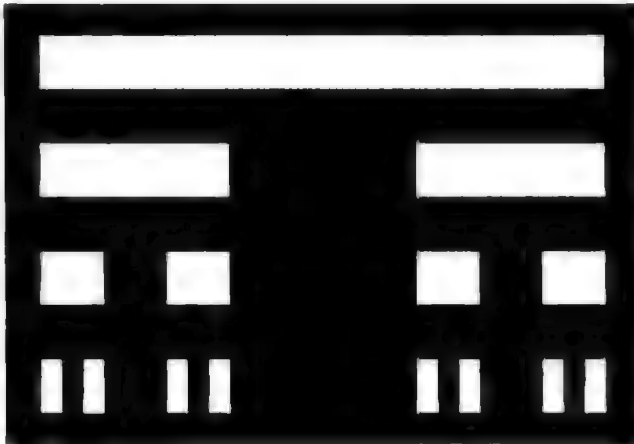
Cantor sets

کۆمەڵەکانی کانتۆر، بریتین لە سیما دیارەکانی شتانێک کە ناسراوە بە **لەیەکبووەکان** (Fractals)[40]. ئەم بیرۆکەیە لە لایەن جۆرج کانتۆر گەشەی پێدرا، بیرۆکەکە پیشانی دەدات کە ماوەیەکی (Interval) سنووردار لە هێڵی ژمارەکان، کۆمەڵەیەکن کە ناژمێردرێن (Uncountable). بەلام پرسیارەکە ئەوەیە: بۆ هەموو کۆمەڵە نەژمێردراوەکان، ئەم شتە راستە؟ واتە لە هەموو کۆمەڵە نەژمێردراوەکان ئەم ماوە هێڵە (Line interval) هەیە؟ بۆیە کانتۆر پیشانی دا مومکینە کە کۆمەڵەیەکی نەژمێردراو دروستبکەین کە هیچ ماوە هێڵێکی تێدا نەبێت. کۆمەڵەکانی کانتۆر، کۆمەڵەیەکن تا رادەیەک ئاڵۆزن، بەجۆرێک پێکهاتەکەیان لەسەر پێوەری بچوک بۆ بچوکتر دەپوکێتەوە. یەکێک لە نمونەکانی کۆمەڵەکانی کانتۆر، پێی دەوترێت سێیەکی ناوەراستی کۆمەڵەی کانتۆر (Middle third Cantor set). ماوە کۆمەڵەیەکە، کە لە سێ بەش، بەشی ناوەراستەکەی لادەبرێت، وەک لە وێنەکەدا دیارە. ئەم

---

40 لەیەکبووەکان (فراکتال) پێکهاتەیەکی ئەندازەییە، کە لە گەورەکردنەوە و دووبارەکردنەوەی شێوە ئەندازەییەکانی لێکچووی شێوە بنەڕەتییەکە پەیدا دەبێت. بە دەستەواژەیەکی تر، فراکتاڵ بە پێکهاتەیەک دەوترێت کە هەر بەشێکی هاوشێوەی شێوە گشتییەکەیە. فراکتاڵ لە دوور و لە نزیکەوە یەکسان دەبینرێت، بەم تایبەتمەندییەی پێی دەوترێت: لەخۆچوویی (self-similar). فراکتاڵەکان یەکێک لە ئامرازە گرینگەکانی گرافیکی کۆمپیوتەر. وشەی فراکتاڵ لە ساڵی 1976 لەلایەن ماتماتیکزان "بێنۆیت ماندێلبۆرت" هاتە ناو دونیای بیرکارییەوە.

کارەش لە هەنگاوی یەکەم، دوو ماوەی ترمان دەست دەکەوێت. بۆیە لە قۆناغی n دا، 2n ماوەمان دەبێت، کە هەر یەکەیان بە درێژی $(\frac{1}{3^n})$، وە سەرجەمی درێژییەکانی $\left(\frac{2}{3}\right)^n$. کاتێک n لە ناکۆتا نزیک دەکەینەوە، دیارە ئەمەش بە نزیکەیی دەبێتەوە بە سفر! ئەمەش هەول و تەقەلای دەوێت بۆ ئەوەی پیشان بدرێت کە بەڕاستی شتێک هەیە کە بەجێ ماوە لە سنورە ناکۆتاکان لەم بنە دابەشکردندا؛ بۆ سەلماندنی ئەوەی کە کۆمەڵەک نەژمێردراوە.



لەم وێنەی سەرەوە، هێڵەکەی یەکەم کۆمەڵەکە دەنوێنێت. ئەگەر ئەو کۆمەڵەیە بکەینە سێ بەش، بەشی ناوەڕاست لابەرین، دوو بەش دەمێنێتەوە. دووبارە ئەو دوو بەشە هەر یەکەیان دەکەینە سێ بەش، بەشی ناوەڕاست لابەرین... بەم شێوە.

کێشەکانی هیلبێرت

Hilbert's problems

کێشەکانی هیلبێرت، بریتییە لە 23 پرسیار کە لە لایەن "دەیڤد هیلبێرتەوە" ئاراستە کراو لە ساڵی 1900 لە کۆنگرەی بیرکاری لە پاریس. هیلبێرت پێی وابوو، کە ئەم کێشانە کلیلی پێشکەوتنی بیرکارین لە سەدەی بیستەم. لەکۆندا، 300 ساڵ لەمەو بەر، سیستەمی بەڵگەنەویستی لە لایەن ئیقلیدەوە جێبەجێ کرا لە زۆر بواردا. بیرکاریزانەکانیش هەستان بە پێشخستن و جێگیرکردنی بەڵگەنەویستەکان (Axioms) بە پێی ئەو بوارەی کاری تێدا دەکەن. لە ئەندازەدا، هێڵ، خاڵ و چەماوە و تایبەتمەندییەکانیان، پاشان گەشەپێدانی ئەو بابەتانە بەهۆی ئەو بەڵگەنەویستانەوە بە پشت بەستن بە لۆجیک، دواتر بونیاتنانی بیردۆزەکان و سەلماندنیان. هەندێک لەو کێشانەی هیلبێرت، پەیوەندی بە میتۆدی بەڵگەنەویستی و درێژکردنەوەی (زیادکردن) بەڵگەنەویستەکان هەیە، واتا هیلبێرت و شوێنکەوتوانی پێیان وابوو لە رێگەی فۆرمولەکردنی بەڵگەنەیستەکان، دەتوانین بگەین بە چارەسەری کێشەکان، وە هەموو کێشەیەکی ماتماتیکی، بەڵام ئەو کارە درێژەی نەبرد و بەهۆی کارەکەی کۆرت گۆدێل[41] بە شێوەیەکی چاوەڕوان نەکراو، بەربەستێکی خستە

---

41 لۆجیکزان و بیرکاریزانی ئەمەریکی بوو، هەندێک لە دەرئەنجامە سەرەکییەکانی بیرکاری سەلماندن و هەر بە ناوی خۆیەوە کرا. سەرەرای ئەمانەش، پیشانی دا کە ئەو هەوڵ و تەقەلایەی بەرنامەکەی دەیڤد و هەندێک لە لۆجیکباوەڕەکان خەریکینە، هیچ دەستەکەوتێکی نییە و هەوڵێکی نەزۆکانەیە.

بەردەم هیڵبێـرت و دەسـتەکەی، چـونکە کـارەگەی گۆدێـل، جیهـان بینینـی ئـێمەی سـەبارەت بە تیـۆری بەڵگەنەویسـتی تەواو گـۆڕی. هەر بـۆیە تـا هەنـووکەش چەنـدین کێشـەی بیرکـاری هەن کە هەر بە چارەسـەرنەکراوی ماوەتەوە.

کۆرت گۆدێل؛ لە گۆڕنەری پێشبینییەکانی 'دەیڤید هێبێرت و بێرتراند راسل'(ئوسامە تحسین)

'رام وایە مـادام کـارەکەی "گۆدێـل" چارەسـەری چەنـدین پرسـی یەکلانەکـراوەی ماتمـاتیکی تـا هەنـوکە درێژکـردەوە وە بگـرە هیـوای چارەسەریشـی لە هەنـدێکیان هەر بـڕی، ئەوە دەبێـت دووبـارە بە دڵنیاییەکانمـان دا بچیـنەوە لەوانەی بەر لە "گۆدێـل" پێـی گەیشـتووین...'چونکە بەگشـتی تیـۆری لە 'بیرکـاری پەتـی' وایە؛ گەر شـتێک سـەلمێندار، ئیتـر دەرگـای مشـت و مـڕی لەسـەر دادەخرێـت. چـی دەبێـت دووبـارە لە هەمـوو یـان لە بەشـێکی ئەو دەرگایـانە بـدەینەوە؟ بـۆچی 'هیڵبێـرت' پێـی وابـوو جیهـان بینینـی ئـێمە بـۆ ماتماتیـک لە سـەدەی 20م دەگۆڕێـت ئەگەر هـاتوو هەنـدێک لە کێشـەکانی یەکلابکـرێتەوە؟ پێشـبینی 'هیڵبێـرت' دەبێـت چـی بووبێـت؟ دەشـێت پێشـبینی 'هیڵبێـرت' هەمـووی لە رێـگەی گەشەسـەندنی سیسـتەمێکی بەڵگەنەویسـتی بێـت بـۆ چارەسـەری کێشـەکان، وای پێشـبینی کـرد بـوو: کە سیسـتەمێکی وا پـێکەوە بنێـت (Combine) لە بەڵگەنەویسـت، کە وەک عەسـای سـیحری، چـی ویسـت پێـی وەڵام بـداتەوە! مانـای قسـەکەی 'هیڵبێـرت' لە گرنگـی یەکلاکـردنەوەی

پرسەکان نەبووە، بەڵکو مەبەستی ئەو سیستەمە بووە کە پێی دەگەین و ئەو پرسانەی پێ وەڵام دەدەینەوە. لەگەڵ ئەوەش، بۆمان هەیە گومان لە کارەکەی گۆدیلیش بکەین[42]! ئەو 23 کێشەیەی هیلبێرت هەندێکیان شیکارکراون و هەندێکی تا ئێستا بە شیکارنەکراوی ماونەتەوە.

"مێژوو، ڕێچکەی پێشکەوتنی (دابڕان) زانستمان بۆ ڕووشندەکاتەوە. وەک دەزانین، کە لە هەر قۆناخ و چەرخێک، چەندین کێشە هەن، ئەو کێشانەش لە چەرخی دوای خۆیان یان چارەسەر دەکرێت، یان وەک شتێکی بێ بەها بەلاوەدەنرێن و کێشەی تازە شوێنیان دەگرنەوە" (دەیڤید هیلبێرت)



[42] وەرگێڕ.

بیردۆزی ناسەقامگیری گۆدێل

Gödel's incompleteness theorems

کــارەکەی گۆدێــل لە ســالی 1930 ســنورێکی پــۆلاینی خســتە بەردەم بیرکاریزانەکــان، کە ئەویــش ئەوە بــوو: ئــێمە دەتــوانین چیــی بــزانین و چیــی نەزانـــین. هەر ئەوەش بـــوو خەونەکەی هیلبێرتـــی لەگۆڕنـــا کە بە هەمـــان شــێوەی "ســتیف هۆکینــگ" دەیوســت ڕژێمێــک-سیســتەمێک بــۆ ماتماتیــک بـــدۆزێتەوە و بتوانێـــت وەڵامـــی هەمـــوو ئەو کێشـــانە بـــداتەوە کە بەچارەســەرنەکراوی لەبەردەمــان مــاوەتەوە، یــاخود ئەو کێشــانەی ڕوومــان تێــدەکەن، سیســتەمێک کە لە کۆمەڵێــک بەڵگەنەویســت پێکهاتبێــت و وەڵامــی ورد و درشــتی کێشــە ماتماتیکییەکــان بــداتەوە. سیســتەمێک کە دژەیەک لە بەرامــبەر هــیچ مۆدلێــک بەرامــبەر بە هــیچ مۆدلێــک بــۆ هەمــان سیســتەمەکە دروســت نەکــات، ئەوەبــوو گۆدێــل هــات وتــی توانــای ئــێمە سنوردراوە کە زۆر شــت هەیە نــاتوانین بــزانین ڕاســتە یــان هەڵەیە، بە واتــایەکی تــر، توانــای سەلماندنی هەندێ دەقی ماتماتیکیمان نییە.

دوای کــارەکەی گۆدێــل، بیرکاریزانـــان ســـەرگەرمی ئەوە بـــوون کە ئەو دەقـــانەی ناتوانـــدرێت بســـەلمێندرێت، وەک بەڵگەنەویســـتێک بـــۆ سیســـتەمەکەی زیـــاد بکەیـــن، بەڵام دواتـــر هەمـــان کێشـــە ڕووبەڕووی سیســتەمەکە دەبێــتەوە، دووبــارە بە پێــی کــارەکەی گۆدێــل، تووشــی چەنــد دەقێــک دەبــین کە دیســـانەوە توانـــای ئەومـــان نیــیە بیانســـەلمێنین. بــۆیە هەزمکردنـــی ئەوەی کە دەقێــک بــۆنی ڕاســتی لــێ بێــت، بەڵام ســـەلماندنێک

نەبێت بۆی، ئەستەمە. بۆیە کارەکەی گۆیل تێگەیشتنی زیاتری بە ئێمە بەخشی لە نێوان سەلمێندراو و ڕاستی. دواتر هەر لەم سۆنگەیەوە، ئەی خودی بەڵگەنەویستەکان چین؟ کە ئەمان دەقیکن هەر سەرەتاوە دەڵین ئەمانە خۆرسک ڕاستن و پێویستیان بە سەلماندن نییە. بۆچی لەسەر کۆمەڵێک بەڵگەنەویست، سیستەمێک یاخود پێناسەیەک دادەمەزرێت و بگرە ڕەنگە لە ڕێگەی چەند چەمک و دەقێکی کورت سیستەمێکی ئیجگار گەورە پێکدێنن، وەک نمونەی بەڵگەنەویستەکانی تۆپۆلۆجی.

بۆ وەلامی ئەم جۆرە پرسیارانە، شتێک لە دوورەوە چاودێری هەنگاو بە هەنگاوی هەموو شتێک دەکات لە هەر زانستێک، ئەویش "ئەپستمۆلۆژییە" واتا تیۆری زانین. چونکە گەر لە چەمکی هەر دەقێکی نێو ماتماتیک وردبینەوە دەبینین مەعریفیەک هەیە هەموو چەمکەکان بەیەکەوە دەبەستێتەوە و سەر و کلکی هەموو ڕووداوەکانی ناو سیستەمەکە لە خۆ دەگرێت و دژەیەکی هیچ چەمکێکی تر نابێت لە ناو هەمان سیستەم. "کانت" لە هەمبەر ئەم پرسە بەردەوام جەختی لەسەر ئەوە دەکردەوە کە: "ئێمە پێوستمان بە ڕەخنەگرتن لە ئەقڵ نییە لە بابەتێکی وەک ماتماتیکیش! لە بەرئەوەی پرنسیپەکان ڕاستەوخۆ بەچاو لە نێو حەدس وێنا دەکرێن". بۆیە خودی سیستەمێک یان هێزی سیستەمێک، لە ڕوونی و یەکگرتنەوەی چەمەکانەوە سەرچاوە دەگرێت دواتر هەموو چەمکەکان بەیەکەوە دەبنە بونیادێکی (ئەبستراکت) کە دواتر کۆمەڵێک تیۆر پێکدێنن.

گەر بــاس لە نمــونەیەک بکەیــن، وەک ئەنــدازەی ئیقلیــد، کە یەکێــک لە بەڵگەنەویســـتەکانی ئیقلیــد کە دەڵێـــت: گەر راســـتە هێڵێکمـــان هەبێـــت، لە دەرەوەی ئەم راســـتەهێڵە خاڵێکمـــان هەیە. لێـــرە چەنـــد چەمکێـــک هەن وەک راســـتەهێڵ، دەرەوە، خـــاڵ. ئەســـڵەن راســـتەهێڵ چییـــە؟ دەرەوە چییـــە؟ خـــاڵ چییـــە؟ وەک کـــردارە ســـەرەتاییەکان لە جەبـــری پوخـــت، وە یـــاخود رادە-تێـــرم پێناســـنەکراوەکان لە سیســـتەمی ئیقلیـــدی. دروســـت بـــوونی سیســـتەم لە خـــۆڕا و هەڕەمەکـــی نییـــە. لێـــرە نمـــونەیەکی ســـادە دەهێنینـــەوە بـــۆ ئەوەی لە بەڵـــگە و سیســـتەم حـــاڵی بـــین: گریمـــان تـــۆ دەتەوێـــت خـــانووەک دروســـت بـــکەی، بـــۆ ئەوەی بتـــوانی تێـــدا ئیســـرەحەت بکەیـــت و خەو و خوراکـــت تێـــدا ئەنجـــام بـــدەی. کە واتە سیســـتەم لە هـــاتنە پێشـــی گرفتێـــک دروســـت دەبێـــت و ناچارمـــان دەکـــات بـــۆ چارەســـەری پرســـێک بیـــر لە سیســـتەمێکی نـــوێ بکەیـــنەوە، وەک چـــۆن زۆر جـــار لە لایەن زانســـتەکانی تـــر بە تـــایبەت فیزیـــا، کۆمەڵێـــک گرفـــت ئاراســـتەی ماتماتیـــک دەکرێـــت. بـــۆ دروســـت کردنـــی ئەو خـــانووە، لە نێـــو زەینـــی خۆمـــان وێـــنەی دەکێشـــین، پێوســـتییەکان چـــین، بە واتـــایەکی تـــر کەرەســـتەکان چـــین؟ کەرەســـتەکانی دروســـتکردنی ئەم خـــانووە کەمەڵێـــک شـــتن، وەک: بلـــۆک، چیمەنتـــۆ، شـــیش...هتد، بەهەمـــان شـــێوەی بەڵگەنەویســـتەکانیش کەرەســـتەیەکن. بلـــۆک و شـــیش و چیمەنتـــۆ ئەم چەمکـــانە پەیوەنـــدییەک بەیەکەوەیـــان کۆدەکـــاتەوە ئەویـــش ئامـــانج لە دروســـتکردنی خـــانووەک، ناکرێـــت بڵـــێن ئەم ســـێ کەرەســـتەیە-چەمـــک بـــۆ دروســـتکردنی ئۆتۆمبێلێـــک بەکـــاربێنین! کەواتە لێـــرە سیســـتەمەکە ســـنووردار دەبێـــت، بەهەمـــان شـــێوەش لە سیســـتەمێکی ماتمـــاتیکی ناتوانـــدرێت بـــۆ هەمـــوو

پرسێک بیر لە سیستەمێکی تاقانە بکەینەوە. کە واتە بە کورتی: ڕوونی و پەیوەندی چەمکەکان لە نێو سیستەمێک، گرنگییەکی زۆری هەیە. ئەمانە هەمووی دەکرێت بڵێین مەعریفەیەکە لە بەستنەوە و تێکهەڵکێشی چەمکەکان و یەکگرتنەوەیان لە شرۆڤەکردنی دۆخێک یان دیاردەیەک، چونکە گرنگترین تایبەتمەندی هزری زانستی، بریتییە لە وردی دارشتنی چەمکەکان و بەگشتی کردنیان و کارپێکردنیان بە شێوەیەکی بابەتییانە. کەواتە لەهەمبەر ئەو باسە، کارەکەی گۆدێل چیی بوو کە پرۆژە و کارە هەرە گەورەکەی ڕاسڵ و واتیهد و هڵبێرت ی لە گۆڕنا؟ بە هەمان شێوە ئەویش بە نموونەیەک: گەر بۆ سیستەمێک سێ مۆدێلمان (نموونە) هەبێت و هەرسێ مۆدێل پاسەدانی هەموو بەڵگەنەویستەکانی سیستەمەکە بکات بە بێ هیچ گرفتێک، ئەوە ئەو سیستەمە نا تەواوییەکی هەر تێدایە و بێ کەم و کورِی نییە، بە واتایەکی تر، ناسەقامگیرە. ئەم کەم و کورتییانە توانای خۆ لێ لادانیان تێدا نییە! بۆ نموونە لە جەبردا بابەتێک هەیە بە ناوی مەیدان (Field)، کە چەند بەڵگەنەویستێک دەگرێتە خۆ، ئەو کۆمەڵانەی دەبنە فیلد وەک: کۆمەڵەی ژمارە ڕاستییەکان، ڕێژەییەکان و ئاوێتەکان، ئەمانە سێ مۆدێلن بۆ ئەو سیستەمە کە پاسەدانی هەموو بەڵگەنەویستەکانی سیستەمەکە دەکەن، بەڵام لە ناو خودی مۆدێلەکە، شتانێک هەن ڕاستن، بەڵام لە مۆدێلەکانی تر ڕاست نین، لە کاتێک هەرسێ مۆدێل دەچنە ژێر ناوی سیستەمەکە، وەک: $a \times a = 2$، دیارە ئەمە لە کۆمەڵەی ژمارە ڕاستییەکان ڕاستە، بەڵام لە کۆمەڵەی ژمارە نا ڕێژەییەکان ڕاست نییە! کەواتە سیستەمەکە لێرە گرفتێکی تێکەوت،

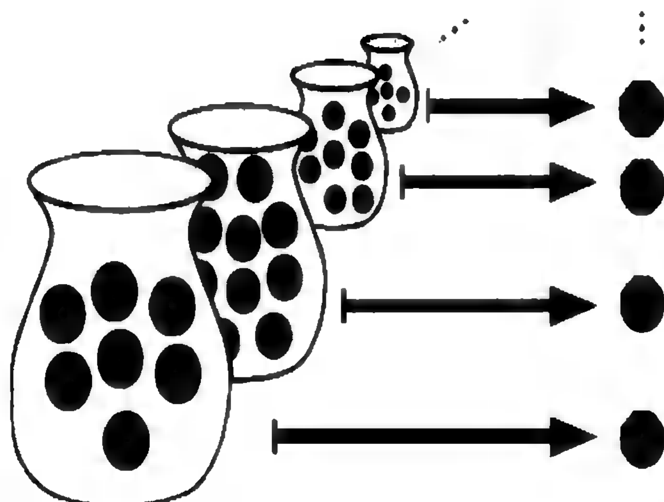
بەمەش بەدەردەکەوێت ئەم سیستەمە ناتەواوە. هەر ئەمەش بوو دوای نزیکەی 20 سالێک ئەو بیروباوەڕەی ببوە قسەیەکی باو لە نێو پەرتوکەکان کە گوایە "بۆ هەموو ڕاستییەک دەتواندرێ سیستەمێک دروست بکرێت" بە هەڵە خرایەوە. بۆیە ڕاستی و دڵنیایی لە ماتماتیک لە چوارچێوەیەکدایە، لە دەرەوەی ئەو چوارچێوەیە، چەندین هەرەس هەن بۆ سیستەمەکە.[43]

[43] ئەم گوتارە لە نووسینی خۆمە و لە بلۆگی بیرکاری بۆ کورد بڵاوکراوەتەوە.

بەڵگەنەویستی بژاردە

The axiom of choice

بەڵگەنەویستی بژاردە، ڕێسایەکی سەرەکییە لە تیۆری کۆمەڵەکان، کە تێدا وەک بەڵگەنەویستێک سەیردەکرێت بۆ فەراهەمهێنان و دروستکردنی پەیوەندییەک لە نێوان کۆمەڵەکان. بەڵگەنەویستەکە بەم شێوەیە: وادانێ ناکۆتا لە کۆمەڵەمان هەیە، وە هەر کۆمەڵەیەک بە لایەنی کەم زیاتر لە دانەیەکی تێدایە، ئەوە مومکینە کە ناکۆتا لە یەکبەدوای یەک دەستنیشان بکەین و دروست بکەین بە وەرگرتنی هەر دانەیەک لە هەر کۆمەڵەیەک. ئەمەش ڕەنگە تۆزێک نالۆژیکانە دەربکەوێت، بەڵام ئەمە ڕێسایەکە و ڕێگە بەشتێکی لەو شێوەی دەدات. لەمەوەش چەندین بیردۆز سەرئاوکەوت.



تیۆری ئەگەر

Probability theory

تیـــۆری ئەگەر، یەکــێکە لە لقەکـــانی بیرکـــاری، کە تێـــدا مـــامەڵە لەگەڵ پێشـــــــبینی دەکـــــات و بە دوای دەرئەنجامەکـــــان دەگەڕێـــــت و ئەگەری ڕوودانـــی ڕووداوێـــک دەردەخـــات بە ڕێـــژەیەک. بـــابەتی ئەگەر یەکــێکە لەو بابەتـــانەی کە تێـــدا پشـــتی بە تیـــۆری کۆمەڵەکـــان بەســـتووە، واتە تیـــۆری کۆمەڵەکـــان خەت و خـــاڵی تیـــۆری ئەگەری داڕشـــتووە، لەهەمـــان کاتـــدا لە نـــاو خۆیـــدا بـــریتییە لە تیـــۆرێکی نـــوێ و ســـەربەخۆ. لە ســـەدەی حەڤـــدەهەمی زایـــنی، زاناکـــان توانیـــان زانســـتی ئامـــار گەشـــە پێبـــدەن و زانیـــاری نـــوێ بـــدەن بە دەســـــــتەوە، کە لەم پێشـــــــکەوتنەش، زانســـــــتی ئەگەر ســـــــەرئاو کەوت.[44] بـــابەتی ئەگەر مـــــامەڵە لەگەڵ هەمـــــوو ئەنجـــــامە مومکینەکـــــانی دیـــــاردەیەک دەکـــات. نمـــونە: هەڵـــدانی دینـــارێکی ئاســـن (شـــێر و خەت) ســـێ جـــار بە دوای یەک. پـــێش هەمـــوو شـــتێک ئـــێمە دەتـــوانین کـــۆمەڵەی هەمـــوو ئەو ئەنجامـــانەی چـــاوەڕوان دەکرێـــت ڕوودەدات لە هەڵـــدانی ئەو دینـــارە بـــۆ ســـێ جـــار، هێمـــا-ڕەمـــز بـــۆ دابنـــێین و، بیـــانگۆڕین بـــۆ هێمـــا. بـــۆ شـــێر دەتـــوانین پیتـــی H دابنـــێین و بـــــۆ خەت T دابنـــــێین. کە ئـــــێمە ســـــێ جـــــار ئەو دینـــــارە هەڵـــــدەدەین، ئەوە 8 ئەگەرمـــــان هەیە 2^3 ، لێـــــرە 2 بنچیـــــنەیە، چـــــونکە دینـــــار 2 ڕووی هەیە، بە توانی 3 ، چونکە 3 جار هەڵدان-فڕێیی دەدەین، کە ئەگەرەکان ئەمانەن:

[44] پەرتـــوکی: ئامـــارزانی. د. دلشـــاد شـــاکر ئیســـماعیل بۆتـــانی. بەشـــی ئامـــار-کـــۆلێژی بەڕێوەبردن و ئابووری-زانکۆی سەلاحەدین. چاپخانەی ڕۆکسانا-هەولێر، 2015

$$\{TTT,TTH,THH,THT,HTT,HTH,HHT,HHH\}$$

بێ گومان دەبێت یەکێک لەم ئەگەرانە ڕووبدات، کە ئەگەری هەر هەموویان بەیەکەوە دەبێت بکاتە 1 ، وە ئەگەری ڕوودانی هەر یەکەیان دەکاتە $\frac{1}{8}$ ، بەڵام ئەگەری ڕوونەدانی هیچ یەک لەمانە، سفرە! لێرە دەتوانین پرسیاری زیاتر دروست بکەین، وەک: ئەگەری ئەوە چەندە کە لەو 3 هەڵدانە 2 خەتی T تێدا بێت؟ ئەگەر سەیری کۆمەڵەی دەرئەنجامەکان بکەین، دەبینین کە لە 3 باردا، لە هەڵدانەکان دەکرێت دوو T تێدا بێت، ئەوانیش:TTT,TTH,THH، واتە ئەگەری ئەوەی لەو سێ هەڵدانە دوو جار خەت دەرکەوێت، دەکاتە: $\frac{3}{8}$. چەندین پرسیاری تر دەتوانین دروست بکەین.



کۆمەڵە توانستییەکان

Power sets

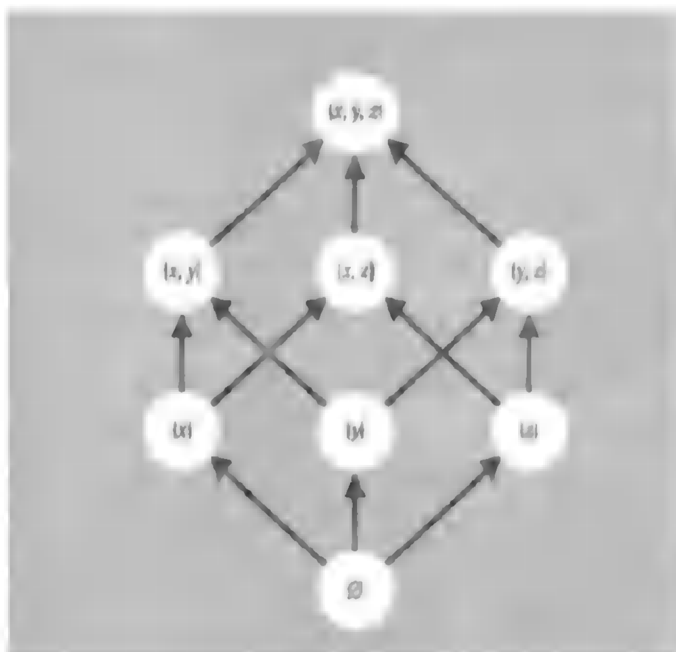
کـۆمەڵەی توانسـتی، بـۆ کـۆمەڵەیەکی وەک S، بـریتییە لە هەمـوو بـنە کۆمەڵەکـانی S و تەنـاتەت کـۆمەڵەکە S خۆشـیی لەگەڵ کـۆمەڵەی بەتـاڵ-ϕ هەمـووی بەیەکەوە. بۆنمـونە: ئەگەر کـۆمەڵەی S مـان هەبێـت: $S = \{0،1\}$ تەنیـا دوو دانەی تێـدا بێـت، ئەوە ئەگەر بێـت و کـۆمەڵە توانسـتی ئەو کۆمەڵەیە بدۆزینەوە، ئەوە دەکاتە:

$$P(S) = \{\phi ، S ، \{0\}، \{1\}\}$$

بیرکـاریزانی ئەڵمـانی "جـۆن کـانتۆر" لە ڕێـگەی بەکارهێنـانی توانسـتی کۆمەڵەکـان، تـوانی پیشـانی بـدات کە ناکۆتـا پـۆلی جیـاوازی ناکۆتامـان هەیە، ئەمەش مشـت و مڕێـک بـوو هاوشـێوەی پاڕادۆکسـی سەرتاشـەکە. ئەو مشـت و مـڕەی کـانتۆر، ئەوەی دەرخسـت کە دوو جـۆر لە کـۆمەڵەی ناکۆتامـان هەیە، ئەوانـیش: کـۆمەڵەی ناکۆتـای ژمێـردراو (Countable) و کـۆمەڵەی ناکۆتـای نەژمێـردراو (Uncountable)، کـۆمەڵەی ناکۆتـای نەژمێـردراو واتە هـیچ پچڕانێکـی تێـدانییە، وەک کـۆمەڵەی ژمـارە ڕاسـتییەکان. جـۆن کـانتۆریش لە ڕێـگەی ئەم بیـردۆزەوە، پیشـانی دا کە

توانستی کۆمەڵەیەکی ناکۆتا، زۆر گەورەترە لە خودی کۆمەڵەکە! وەک لەو نموونە سەرەوە دەبینین، کە توانستی کۆمەڵەی S دانەکانی زیاترە لە دانەکانی ناو کۆمەڵەی S.

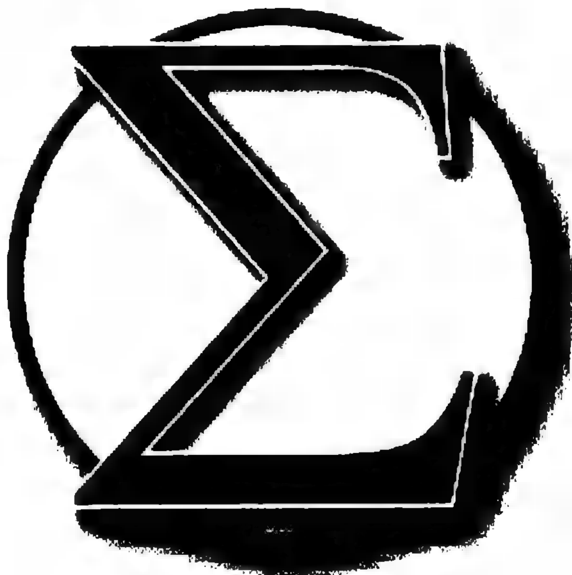
هەر بۆیە ژمارەی دانەکانی P(S) هەمیشە گەورەترە لە ژمارەی دانەکانی کۆمەڵەی S خۆی. توانستی کۆمەڵەکان، لە "تۆپۆلۆجی" کە لقێکی بیرکارییە، گرنگییەکی زۆری هەیە، بەجۆری، کۆمەڵەی توانستی لەسەر ئاهورتە (Space) تۆپۆلۆجییەکان بەهێزترین تۆپۆلۆجییە، کە لە بابەتەکانی دواتر باسی لێوەدەکرێت.



بەشی سێیەم

زنجیرە و یەکبەدوای یەک

Seqenes and series



ناساندنی یەکبەدوای یەکەکان

Introducing squenes

یەکبەدوای یەکی (sequence) بیرکاری[45] بریتییە لە خشتەیەک (List) ژمارە، کە تێیدا ژمارەکان ریزکراون بە شێوەیەکی رێک، وەک کۆمەڵەکان. بەلام جیاوازی نێوان کۆمەڵەکان و یەکبەدوای یەکەکان لە دوو خاڵ دایە، ئەوانیش: هەموو یەکبەدوای یەکەکان کۆمەڵەن، بەلام پێچەوانەکەی راست نییە. هەموو یەکبەدوای یەکەکان رێزکراون و رێکن، بەلام کۆمەڵە مەرج نییە وابێت، چونکە لە یەکبەدوای یەکەکان، یاسایەک هەیە کە تایبەتە و دانەکانی ناو خشتەکە بە شێوەیەکی جوان رێزدەکات و بەرهەم دێنێت.

یەکبەدوای یەکەکان کۆمەڵەیەکی ناکۆتان، ئەم وەسفەش بۆ هەموو یەکبەدوای یەکەکان راستە، بەلام بۆ کۆمەڵەکان مەرج نییە راست بێت. سادەترین نمونە لە یەکبەدوای یەکەکان، بریتییە لە کۆمەڵەی ژمارە سروشتییەکان، وەک: ...،1،2،3 کە رادەکان بۆ ناکۆتا درێژدەبنەوە (Infinite sequence) بە بێ کۆتایی هاتن، وەک: یەکبەدوای یەکی فیبوناچی، کە لە بەشی یەکەم باسمان کرد.

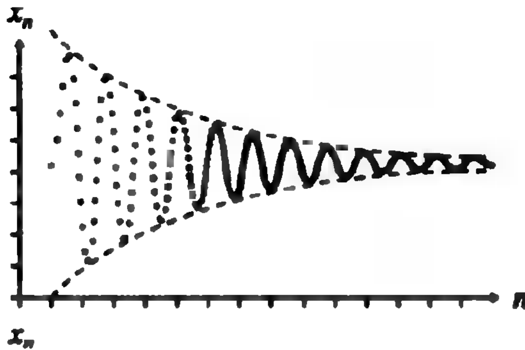
---

45 خۆی بە وردی پێناسەکە بەم شێوەیە: یەکبەدوای یەک، بریتییە لە نەخشەیەک، کە بوارەکەی: کۆمەڵەی ژمارە سروشتییەکانە، مەوداکەی ژمارە راستییەکانە.

ئەو دوو نمـــونەی باســـمان کـــرد، بە زیـــادبوونی ڕادەکـــان، ژمارەکـــان گەورە و گەورەتـــر دەبـــن، بـــۆیە بەم جـــۆرە یەکـــبەدوای یەکـــانە دەڵـــێن: یەکـــبەدوای یەکـــی لێکـــدوورکەتوو (Diverge)، ئەگەر وانەبـــوو، ئەوە پێـــی دەوترێـــت: یەکـــبەدوای یەکـــی لێکنزیکبـــوو (Converge) کـــاتێ نرخـــی ڕادەکـــان لە ناکۆتـــا نزیـــک دەکەیـــنەوە. لە یەکـــبەدوای یەکـــدا، لە نێـــوان ڕادەکـــان هـــیچ کرداریکمـــان نیـــیە، وەک: کـــۆ، کەم و جـــاران، تەنیـــا بە فـــاریزە ڕادەکـــان لێک جیادەکەینەوە. نمونەیەک بۆ یەکبەدوای یەک و چۆنییەتی نووسینی:

$$\{a_n\} = \{a_1، a_2، a_3 ، ...\}$$

کاتێک $n = 1،2،3،4،5، ...$



نمـــــونەی یەکـــــبەدوای یەکـــــی لێکنزکبـــــوو، وەک ئەو وێـــــنە ڕوونکردنەوەییەی سەرەوە.

ناساندنی زنجیرە

Introducing series

زنجیرەی (Series) بیرکاریانە، بریتییە لە دەستەواژەیەک کە مەبەست لە کۆکردنەوەی ڕادەکانە بە پشت بەستن بە یەکبەدوای یەکی ژمارەکان. لە یەکبەدوای یەک، لە نێوان ڕادەکان هیچ کردارێکی کەم و کۆمان نەبوو، بەڵام لە زنجیرە، لە نێوان ڕادەکان، کرداری کۆکردنەوە یان کەمکردنەوە، وەیانیش هەردووکیان هەیە، بەگشتی زنجیرە بریتییە لە کۆکردنەوەی هەموو ڕادەکان بەیەکەوە. لەبەر ئەوەی وتمان کۆکردنەوەی ڕادەکانە، بۆ ئەمەش هێمای "سیگما" $\sum$ هێمایەکە بۆ زنجیرە، ئەم هێمایەش هێمایەکی "گریکییە" کە تێدا خاڵی دەستپێکی زنجیرەکە و خاڵی کۆتایی پیشان دەدات، لە هەمان کاتدا، شێوەی گشتی دانەکانی یەکبەدوای یەکەکەش (Index) دەگرێتە خۆی و، سنورەکانی زنجیرەکەش، بەم شێوە:

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i = a_1+a_1+a_3+a_4+a_5+\cdots$$

لە زۆر باردا کۆکردنەوەکە بۆ ناکۆتا ڕادە (Term) دەڕوات، یانیش لە هەندێ باردا، بۆ کۆتادار کۆکردنەوەکە دەڕوات. وەک: کۆی 100 ژمارەی سەرەتای کۆمەڵەی ژمارە سروشتییەکان. لێرە سنورمان بۆ دانا وتمان 100 ژمارەی سەرەتا، دەشکرێت هیچ سنوورێکی نەبێت و بۆ

ئاکوتــا بێــت. بەم جــۆرە زنجیــرەیەش دەڵــێن: کــۆکردنەوەیەکی بەشــی-
هەنــدەکی (Partial sum)، واتە لە زنجیــرە گەورەکە بەشــێکی وەردەگــرین
و ئەنجامی کۆکردنەوەکەی دەدۆزینەوە، وەک ئەو نموونەی خوارەوە:

$$\sum_{i=0}^{100} i = 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + 100 = 5050$$

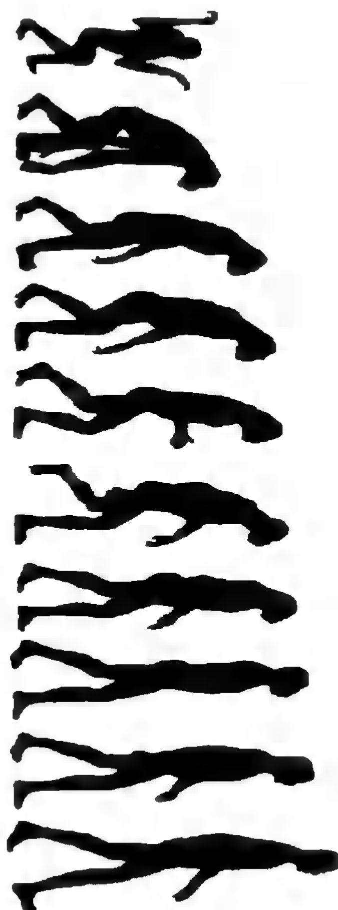
ســوودی زنجیرەکــان زۆر جــار بەکاردێــت بــۆ هەژمــارکردنی تێچــووی
شــتێک، وەک: تێچــووی دروســتکردنی باڵەخــانەیە، کە چــۆن تێچــووی
دروســتکردنی نهــۆمی یەکەم و نهــۆمی دووەم جیــاوازە، ئەوە بە هــۆی
زنجیرەوە دەکرێت تێچووەکەی بخرێتە ڕوو.

ئامانجەکان

Limits

ئامانجی یەکبەدوای یەکە ناکۆتاکان یان زنجیرە ناکۆتاکان، بریتییە لە ژمارەیەک-نەگۆڕ ئەگەر هاتوو ئامانجەکە بوونی هەبێت. بۆ دۆزینەوەی ئامانجیش، دەبێت ژمارەی رادەکان یان کۆکردنەوەکان لە ناکۆتا نزیک بکەینەوە. دیاریشە ئامانجی یەکبەدوای یەکەکە یارمەتیمان دەدات لە دۆزینەوەی ئەنجامی زنجیرەیەک بە نزیکی، یان لە هەندێ باردا، پێمان دەڵێت کە ئەنجامی زنجیرەیەک دەکاتە چەند. وەرگرتنی ئامانج و بەکارهێنانی یەکێکە لە بابەتە هەرە سەرەکییەکانی بیرکاری، هەر بە ئامانج شارستانییەتی گریک توانیان لە نرخی نەگۆڕی پای نزیک بکەونەوە. لە لایەن "ئیسحاقی نیوتن" بە هەمان شێوە.

بابەتی ئامانج، بەو شێوەی ئێستا پێشکەوتوو و فراوان نەبوو هەتاکو کۆتاییەکانی سەدەی نۆزدەهەم، لەم چەرخەی کۆتایی، پێشکەوتنی زۆری بەخۆییەوە بینی. بابەتی ئامانج لە پشت زۆرێک بابەتی بیرکارییەوەیە، یەکێکە لەوانە: پرنسیپەکانی شیکردنەوەی بیرکاریانە. ئامانج لە زۆر تیۆری گرنگ رۆڵی سەرەکی دەبینێت، وەک: لە تەواوکاری ریمان، لەگەڵ ئەوەش دەرگای گەشەسەندنی جیاکاری و تەواوکاری بوو (Calculus)، چونکە بەهۆی ئامانجەوە، داتاشراوەی نەخشەکان و دۆزینەوەی رووبەری ژێر چەماوەیەک گەشەی سەند، یانیش تێگەیشتن لە هەندێ چەمکی بیرکاری هەر لە رێگەی ئامانجەوەیە و بەکاربەریی زۆرە.



پاڕادۆکسی زینۆ

Zeno's paradox

پاڕادۆکسەکانی زینۆ، چەند پاڕادۆکسێکن کە لە لایەن زینۆ خۆیەوە داهێنرا. زینۆ قوتابی پارمیدس[46] بوو، کە خەڵکی ئیلیا بوو، لە دەوروبەری 489 پێش زاین ژیاوە. لە راستیدا زینۆ ئەو پاڕادۆکسانەی بۆ بەرگری لە مامۆستاکەی هێنایە کایەوە، بەو چەند پاڕادۆکسە، دژی نەیارانی مامۆستاکەی وەستایەوە. پاڕادۆکسەکانی زینۆ بە رووخسار؛ شێتانە دەردەکەوێت، بەڵام لە ناوەڕۆکدا بەو شێوە سادە و ساکار نییە، بگرە تا ئەمڕۆش ئەو پاڕادۆکسانە جێگای مشت و مڕی زۆرێک لە زانایان و فەیلەسووفانە، چونکە پاڕادۆکس بە بیرکردنەوە لێی، دەرگای چەندین پرسیار تر دەکاتەوە. پاڕادۆکسەکانی زینۆ بەرگری کردن بوو لە بیروبۆچوونێک، ئەویش دەربارەی جووڵە. **پارامیدس؛ نەبوونی جووڵەی ڕەتدەکردەوە که پێی وا بوو جووڵە شتێکی وەهمییە.** ژمارەی پاڕادۆکسەکانی زینۆ زۆرن، یەکێک لەوانە بریتییە لە: **ڕاکردنی نێوان**

---

[46] مەسەلەی ماهییەتی ژمارەیی گەردون، وەک بنەمایەکی مەزهەبی فیساگۆرسی، روبەڕوی گرفتێکی جدی بوەوە، ئەویش تەحەدای ئیلیایەکان بوو. قوتابخانەی ئیلیایی زیاتر مەیلی توێژینەوەی فەلسەفییان هەبو وەک لە ماتماتیکی. پێدەچێت دامەزرێنەرانی ئەم قوتابخانەیە لە بناواندا فیساگۆرسی بووبن. ئوستادی هەرە مەزنیان پارمێندیسی ئیلیایی بو، کە لە سالی 450 ی پز لە دایکبوە. مەزهەبی بنچینەیی ئیلیایەکان بریتی بوو لە یەکێتی و ئەبەدییەتی بوون، ئەمەش لەگەل چەمکی فیساگۆرسیدا نەدەگونجا و دژ بە یەکتر دەوەستن، چونکە فیساگۆرسەکان ئیمانیان بە فرەگەرایی و گۆڕان هەبوو. (شێرکۆ رەشید قادر)

کیسەڵێک و کەروێشکێک لە مەودایەکی دوو میلی. کەروێشکەکە پێی وایە خێرایە، بۆیە ڕێگە بە کیسەڵەکە دەدات زووتر دەست بە ڕۆیشتن بکات، واتە تەرحی دەداتێ، کیسەڵەکەش وەک بوونەوەرێکی فەلسەفی و زیرەک، دوای بڕینی ئەو مەودایەی کە کیسەڵەکە پێی دا، بڕخۆی لێی دادەنیشێت و لە ڕۆیشتن دەوەستێت، دەڵێت: کەروێشکەکە هەرگیز ناتوانێت بە پێشم بداتەوە.

بیرۆکەکە لێرە ئەمەیە: بۆ ئەوەی ئەو دوو میلە ببڕی، پێویستە نیوەی ½ ببڕیت، بۆ ئەوەی نیوەی ببڕیت، پێویستە ¼ ببڕیت، بۆ ئەوەی ¼ ببڕیت، پێویستە $\frac{1}{8}$ ببڕیت... ئیتر بەم شێوە کیسەڵەکە دەڵێت: کەروێشکەکە هەرگیز ناگاتەوە بەمن، تەنانەت هەرگیز ناگات بە هێڵی کۆتایی مەیدانی ڕاکردنەکە.



یەکبەدوای یەکی فیبوناچی

The Fibonacci sequence

یەکـبەدوای یەکـی فیبونـاچی، بـریتییە لە کلێشـەیەکی سـادە و سـەرنج ڕاکـێش. ئەو یەکـبەدوای یەکە لە ئەنجـامی دوو ژمـارەی هەنگـاوی پێشـتر، ژمـارەی سـێیەم بەرهەم دێنێـت. فیبونـاچی نـاوی بیرکـاریزانێکی ئیتـالییە کە ئەم یەکـبەدوای یەکەی دۆزیـوەتەوە لە سـاڵەکانی (1201)، ئەم یەکـبەدوای یەکەش لە زۆر بـابەتی بیرکـاری خـۆی دەبینیـتەوە، تەنـانەت لە فیزیـا و سروشـتیش ئەم شـتە بـوونی. لە ڕووی بیرکـارییەوە، یەکـبەدوای یەکەکە بەم شێوەی پێناس دەکرێت:

$$Fn_{+1} = Fn + Fn_{-1} \left(\text{لەگەڵ } F_0 = 0 \text{ وە } F_1 = 1\right)$$

ئەوەی لەم یەکبەدوای یەکە دەستمان دەکەوێت:

0،1،1،2،3،5،8،13،21،34،55،89، ...

لە زینـدەوەرزانی ئەم ژمـارانەی فیبونـاچی لە چەنـد ڕووەکێـک دەبینـردین، لەوانە: گـوڵی گـوڵەبەڕۆژە، یـان لە زاوزێـی هەنـدێک ئـاژەڵ.

یەکــبەدوای یەکــی فیبونــاچی گرنگــی هەیە لە بــابەتگەلێکی بیرکارییــانە، وەک ئــالگۆریتمی ئیقلیــد، سێگۆشــەی پاســکال و تەنــانەت پەیوەنــدی بە ڕێــژەی زێڕین (Golden ratio) هەیە.



یەکبەدوای یەکە لێکنزیکبووەکان

Convergent sequences

بە ڕادەکانی یەکبەدوای یەکێک دەڵێن: نزیکبووەوە (Convergent) ئەگەر هاتوو بە زیاتر وەرگرتنی ڕادەی یەکبەدوای یەکەکە، ئەوە لە نرخێک-ژمارەک نزیکبێتەوە، یان لە سنورێک. ئەو نزیکبونەوەیەش تەکنیکی پێوستە، واتە بە میتۆدێک ئێمە دەگەین بەو نرخە، کە ڕادەکانی یەکبەدوای یەکەکە لێی نزیک دەکەوێتەوە؟ بۆ نمونە: گەیشتن بە نرخی نەگۆڕی پای لە ڕێگەی یەکبەدوای یەکەوە دەکرێت. کاتێک یەکبەدوای یەکەکە نزیک و نزیکتر دەبێتەوە لە نرخێک، ئەوە دەتوانین بڵێین ئەمە نرخی نەگۆڕی پایە. بۆ ئەم مەبەستەش، تا بزانین یەکبەدوای یەکێک لێکنزیکبووە یان نا، ئەوە لە ڕێگای پێناسەی لێکنزیکبووە بە چەند هەنگاوێک دەتوانین دەریبخەین کە لێکنزیک بووە یان لێکدوور کەوتووە. جۆرێک لە یەکبەدوای یەکمان هەیە پێی دەڵێن: یەکبەدوای یەکی کۆشی[47] (Couchy)، لەم یەکبەدوای یەکە، جیاوازی نێوان هەر دوو ڕادەکی یەکبەدوای یەکەکە زۆر زۆر بچوکە. بۆ نمونە ئەم یەکبەدوای یەکەی خوارەوە لێکنزیکبووە:

---

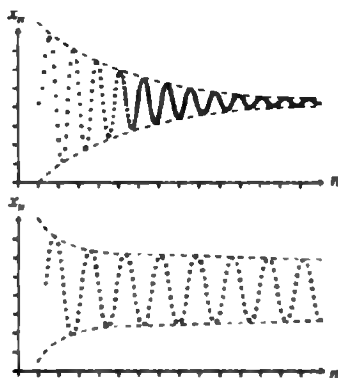
[47] "ئۆگوستین-لوی کۆشی" خەڵکی فەرەنسا بوو. یەکێک بوو لەو بیرکاریزانانەی کە بەردی بناغەی شیکردنەوەی بیرکاریانەی دانا و لە چەندین لقی بیرکاری پێشەنگ بووە. لە بیرکاری چەند شتێک بە ناوی ئەوەوە نراوە، وەک: یەکبەدوای یەکی کۆشی، نەخشەی کۆشی، ڕێسای تەواوکاری کۆشی، ڕێزکراوەی کۆشی، ژمارەی کۆشی... . کۆشی زیاتر لە هەر بیرکاریزانێکی تر، دەستکەوتە بیرکارییەکانی بە ناوەوە نراوە.

$$1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5},\frac{1}{6},\frac{1}{7},\ldots,\frac{1}{n},\frac{1}{n+1},\ldots,0$$

لێـرە بە شـێوەیەکی نزیکراوەیـی دەگەیـن بە سـفر، نەک بە شـێوەیەکی تەواو. ئەگەر سـەیر بکەیـن هەتـا رادەی زیـاتر وەرگـرین، ئەوە ژێـرەی کەرتەکان گەورەتر دەبێت و سەرەی کەرتەکەش هەمیشە بریتییە لە 1.

یەکێـک لە رێـگە هەرە سـەرەتاییەکان بـۆ زانینـی ئەوەی یەکـبەدوای یەکێک لێکنزیکبووە یان نا، ئەوە ئامانجی بۆ وەردەگرین بەم شێوە:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\approx 0$$



ئەم وێـنەیە دوو یەکـبەدوای یەک نیشـان دەدات، ئەوەی سـەرەوە لێکنزیکبووە، ئەوەی ژێر ئەو، یەکبەدوای یەکێکی لێکدوورکەوتووە.

زنجیرەی لێکنزیبووە

Convergent series

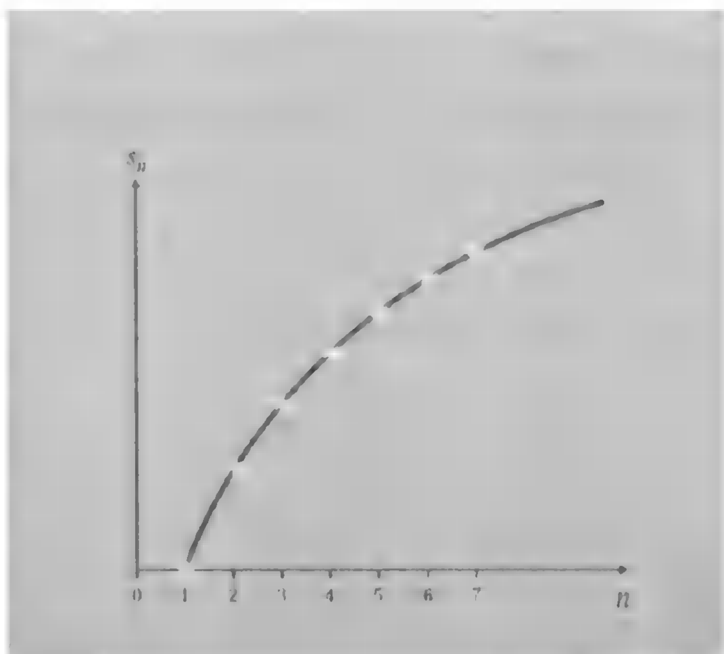
زنجیــرەیەک پێــی دەوترێــت: لێکنزیکبــووە (Converge) ئەگەر هــاتوو کــۆی هەمــوو ڕادەکــانی ئەو زنجیــرەیە لە ژمــارەیەکی (زانــراو) دیــاریکراو یــان ســـنورێک نزیــک بکەوێــتەوە. بــۆ ئەوەی بــزانین کە زنجیــرەیەک لیکنزیبــووە، ئەوە بەشـــێک لە زنجیـــرەکە وەردەگـــرین (Parial sum)، ئەگەر ئەو بەشـــە لێکنزیکبــووە بــوو، ئەوە زنجیــرەکەش لێکنزیکبــووە. مەبەســتیش لە بەشــێک لە زنجیرەکە واتە کۆی چەند ڕادەیەک (Sum of finite terms):

$$s_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

ئەگەر ســـەرنج بـــدەین جیـــاوازی نێـــوان s_n و s_{n+1} دەکـــاتە: $\frac{1}{n+1}$. واتە ئەگەر ســـــەیری دوو ڕادەی یەکـــــبەدوای یەکەکە بکەیـــــن، دەبینـــــین کە تەنیـــا ژێـــرە زیـــاد دەکـــات بە "یەک" یەکە. کاتێـــک n نـــرخەکەی زۆر گەورە دەبێـــت، ئەوە ئەم ڕادەیە $\frac{1}{n+1}$ زۆر بچـــوک دەبێـــتەوە، ئەمەش بەســـە بـــۆ ئەوەی بڵـــێن ئەو زنجیـــرەیە لێکنزیکبـــووە[48]. ئەم زنجیـــرەی ســـەرەوە بە زنجیرەی هارمۆنی ناسراوە.

---

[48] مەبەســت لە لێکنزیکبــووە ئەوەیە کە ئەنجــامی کــۆی هەمــوو ڕادەکــان نەکــاتە ناکۆتــا، بەڵکــو بکاتە ژمارەیەک، ژمارەکەش ژمارەیەکی ڕاستی بێت (Real numbers).



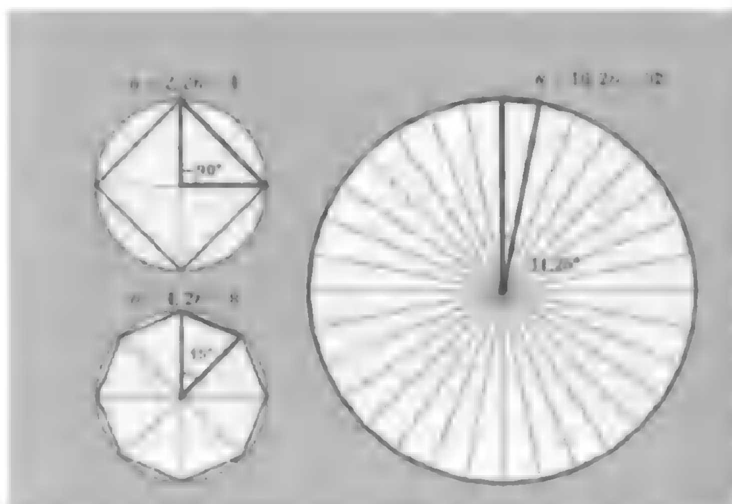
وێنەی زنجیرەی هارمۆنی.

خەملاندنی نەگۆڕی پای

Estimating π

چەندین ڕێگاو شێواز هەن بۆ خەملاندنی نەگۆڕی پای، یەکێک لەم ڕێگانە، بەهۆی یەکبەدوای یەکەوە دەکرێت، واتە لەو نەگۆڕە نزیک دەبێنەوە. ئەگەر سەرێک لە ڕابردوو بدەینەوە بەر لە سەدەی سێیەمی پێش زاین، ئەوە دەبینین کە بیرکاریزانە گریکەکان وەک ئەرخەمیدز لە سیراکوز یەکبەدوای یەکی بەکارهێناوە بۆ دۆزینەوەی نرخی نەگۆڕی پای. ئەگەر سەرنجی بازنەیەک بدەین و نیوە تیرەی ئەو بازنەیە 1 بێت (Unit circle)، ئەوە بە دڵنیاییی چێوەی بازنەکە دەکاتە2π. پاشان بە کێشانی ژمارەیەک چەندلا لە ناو بازنەکە، سەرەتا بە کێشانی چوارلایەک دەست پێ بکەین وەک لەم شێوەی تەنیشت پیشاندراوە ئەوە هەر پارچەیەک دەتوانین وەک سێگۆشەیەک سەیر بکەین. ئێمە دەزانین کە دەورێکی بازنە دەکات 360 پلە، ئەگەر N لامان کێشابێت لە ناو بازنەکە، ئەوە گۆشەی هەر یەکەیان دەکاتە: $\theta = \frac{360}{\pi}$. وتمان نیوە تیرەی بازنەکە دەکاتە 1، واتە درێژی دوولای هەریەک لە سێگۆشەکان هەر دەکاتە 1. لەم بارە گۆشەی هەر یەکەیان دەکاتە $\frac{\theta}{2}$ ، بە بەکارهێنانی نەخشە سێگۆشەییەکان (Trogeometric functions)، دەتوانین لاکانی تری سێگۆشەکان هەژمار بکەن، پاشان دەگەین بە چێوەی چەندلایەکان.

بــێ گومــان ئەخەمیــدز نەگەیشــت بە نرخێکــی وە هــا زۆر نزیــک لەو نـرخەی ئێسـتا، بـۆیە ئەو هەسـتا n لای زیـاد کـرد. دواتـر "ئیسـحاق نیـوتن" لە مـوردەتێکی زۆر تـوانی هەژمـاری ئەو نـرخە بکـاتە بـۆ 15 ڕەنــووس دوای فاریزە.



بیـرۆکەکە ئەوەیە: چێـوەی چەنـدلایەکە دەکـاتە چێـوەی بـازنەکە کاتێـک ژمارە لایەکان بۆ ناکۆتا نزیک دەکەینەوە.

خەملاندنی e Estimating

نەگـــۆڕی e بە ژمـــارەی ئـــۆیلەریش ناســـراوە، کە ژمـــارەیەکی نـــاڕێژەییە، پەیدابوونیشـــی لە ڕێـــگەی گەشەســـەندنێکی یەکـــبەدوای یەکـــی بـــووە، کە هەر لە ڕێـــگەی یەکـــبەدوای یەکەوە خەملانـــدنی بـــۆ دەکرێـــت. هۆکـــاری پەیـــدابوونی ئەم ژمـــارەیەش دەگەڕێـــتەوە بـــۆ گەشـــە و قـــازانج و زیـــان-زەرەر. ئەم نەگـــۆڕە لە لایەن جـــاکۆب برنـــۆلی (Jacob bernole) لە کۆتاییەکـــانی ســـەدەی حەڤـــدەهەم تیشـــکی خـــرایە ســـەر. بە بیرکارییـــانە بەو شێوە دەنووسرێت:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=e$$

مەبەســـت لەم ژمـــارە چیـــیە؟ وادانـــێ دینارێکـــت هەیە، ئەو دینـــارە لە یەک ڕۆژ دینارێـــک قـــازانج دەکـــات. کەواتە خـــۆت دینارێکـــت هەبـــوو، لە یەک ڕۆژ دینـــارێکیش قـــازانج دەکەی، کەواتە لە ئێـــوارە دوو دینـــارت پـــێ دەبێـــت. ئەوجـارە، وا دانـێ ئەو دینـارە تـا نیـوەڕۆ نیـوەی خـۆی قـازانج دەکـات، ئێسـتا، تـا نیـوەڕۆ "نیـو دینـار" قـازانج دەکەیـن، وە دینـارەکەی خۆشـمان وەک خـۆی دەمێنێـــتەوە، کەواتە لە نیـــوەڕۆ "دینـــار و نیوکـــت" پێـــیە، ئەو دینـــار و نیـــوە لەدوای نیـوەڕۆ، تـا ئێـوارە، دیسـانەوە قـازانج دەکـات؛ دینـارەکە، نیـوە قـازانج دەکات، نیوەکەش، نیوەی خۆی قازانج دەکات، لە ئەنجام دا:

$$\mathbf{1}+\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}+\frac{1}{2}+\frac{1}{25}=2.04$$

ئەمە ئەگەر هاتوو دینارەکە لە بەیانی و لە ئێوارە قازانج بکات، واتە دوو هەنگاو، ئەگەر بێت ژمارەی ئەو هەنگاوانە زیاد بکەین بۆ ناکۆتا، ئەوە دەگەینە بەهای نەگۆڕی e.

$$e \approx 2.718$$

$$e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

دووبارەکردنەوە

Iteration

دووبارە کردنەوە-تکرار لە بیرکاری بریتییە لە پرۆسەیەکی چەنجار دووبارە بووەوە. دووبارکردنەوە هەنگاوێک چەندین جار، بەڵام لە هەر هەنگاوێکی نوێ، نرخێک یان ئەنجامێکی جیاوازترمان لە هەنگاوی پێشوو دەست دەکەوێت. هەموو ئەو ئەنجامانەی بەدەستمان دەگات، یەکبەدوای یەکێکمان بۆ دروست دەکەن، ئامانجیش لێی بەدەست هێنانی نرخێکی دیاریکراوە، هەر کە گەیشتینە ئەو نرخە، ئیتر پرۆسەکە دەوەستێنین. ئەو بابەتە لە نومریکال (Numrical analysis) ڕۆڵێکی باڵای هەیە، کە تێدا لەم ڕێگایە، دەگەین بە شیکاری زۆرێک لە هاوکێشەکان و کێشەکان، **ئەوانەی کە بە وردی شیکارەکەیان نازانین**، واتە لەم ڕێگەیەوە شیکارێکی نزیک لە شیکاری ڕاستەقینە بۆ هاوکێشەکان و شتەکان دەدۆزینەوە. دووبارەکردنەوە، زمانێکە کە کۆمپیوتەری هاوچەرخ لێی تێدەگات. ئەوەی زۆر گرنگە لەو بابەتە، سەرەتا لە نرخێکی سەرەتایی (Initial value) دەست بە پرۆسەکە دەکەین، هەر لەم نرخەوە پەیتا پەیتا لە نرخی ڕاستەقینەکە نزیک دەکەوێنەوە، بەڵام ئەستەمە بگەین بە نرخی ڕاستەقینە (بۆچیی؟)[49]. لە ڕاستیدا ئەمەش کارێکی هەر وا ئاسان نییە، چونکە پێش

■ بابەتی "شیکردنەوەی ژمارەییانە" کە لە قۆناغی سێی زانکۆ خوێندوومە، یەکێک بوو لە بابەتە زۆر بەچێژەکان لەلام، کە (د. پەخشان) ئەو وانەی پێیم دا، لەهەمانکاتدا مامۆستایەکی هاندەر بوو.

ئەمە دەبێت بۆ بابەتی لێکۆڵینەوەکەمان، کەرستەمان-ڕێسا و یاسامان هەبێت. نموونەیەکی ئاسان لە هەمبەر دووبارەکردنەوە: وا دانێی ژمارەیەکی سروشتیمان هەیە x . ئەگەر ئەو ژمارەیەک تاک بوو، جارانی 3 بکە و 1 بۆ زیاد بکە. ئەگەر جووت بوو، جارانی 2 بکە. ئەگەر ئێستا هەمان یاساکە دووبارە بکەینەوە، دیارشە لەو پرۆسەیە لە کۆتایی دەگەینەوە بە 1 گەر بە هەر نرخێکی سەرەتایی دەست پێبکەین. لە ساڵی 1937 بیرکاریزانی ئەلمانی "لۆسەر کلاتز" (Lothar Collatz) گریمانەی ئەوەی کرد (conjectured[50]) ئێمە لە هەر ژمارەیەک دەست پێبکەین، ئەوە لە کۆتایی دەگەینەوە بە 1.

نموونە: ئەگەر ژمارە 5 وەرگرین. ئێستا 5 تاکە، بە پێی ڕێساکە $16 = 1 + (3 \times 5)$ ، ئێستا 16 جووتە، بۆیە بە پێی ڕێساکە دابەشی 2 دەکەین دەبێتە 8. دیسانەوە 8 جووتە، بۆیە دابەشی 2 دەکین دەبێتە 4. دیارە 4 یش جووتە، بۆیە دووبارە دابەشی 2 دەکەین دەبێتە 2 ، لەبەر ئەوەی 2 جووتە، دیسانەوە دابەشی 2 دەکەین دەبێت بە 1. ئێستا لێرە دەوستین.

پرسیارەکە ئەوەیە: بیسەلمێنە کە ئەمە بۆ هەموو ژمارەیەکی سروشتی ڕاستە؟!



[50] کۆنجێکتەر (Conjector) دەقێکە نە سەلمێندراوە نە پوچەڵکراوەتەوە.

یەکبەدوای یەکی ژمێرەیی

Arithmetic progressions

یەکبەدوای یەکی ژمێرەیی، بریتییە لە خشتە ژمارەیەک، کە بە شێوەیەکی جوان ڕیزکراون و کلێشەیەی تێدایە (Pattern). جیاوازی نێوان هەر دوو ژمارەیەکی یەکبەدوای یەکی خشتەکە، نەگۆڕە (واتە ژمارەیەکی دیارکراوە)، وەک چۆن لە کۆمەڵەی ژمارە سروشتییەکان ژمارەکان یەک یەک زیاد دەکات و جیاوازی نێوان هەر دوو ژمارەیەکی یەکبەدوای یەکەکە، تەنیا بریتییە لە یەک، یان وەک: ...،0،13،26،39،52 کە تێدا جیاوازی ڕادەکان نەگۆڕە و دەکاتە 13 . یەکبەدوای یەکی لەم شێوە تا ناکۆتا بەردەوام دەبێت. کۆکردنەوەی هەندەکی (Partial sum) لە ڕادەکانی ئەم جۆرە یەکبەدوای یەکانە ئاسانە لە ڕێگەی تەکنیکێکەوە، لە هەمان کاتدا سەرنجڕاکێشیشە. ئەگەر بپرسین کۆی ئەم زنجیرەیەی خوارەوە دەکاتە چەند[51]؟

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \cdots + 100 = ?$$

[51] گاوس کە بیرکاریزانێکی دیار و بەناوبانگە لەهەموو کاتێک، لە تەمەنی منداڵی مامۆستاکەی بۆ ئەوەی منداڵەکان بە شتێکەوە سەرقاڵ بکات، دەڵێت: 1 تا 100 بۆ کۆ بکەنەوە، گاوسی فزوڵ و زیرەکیش دوای چەند چرکەیەک دەڵێت: دەکاتە 5050 ، دیاریشە بۆ مامۆستاکە شتێکی باوەڕپێنەکراو بووە کە چۆن منداڵێک بەو خێراییە توانی ئەمە بکات، ئەویش زلەیەک لە بنەگوێی گاوس دەدات.

ڕێگـایەکی ئاسـان بـۆ هەژمـارکردنی ئەو زنجیـرەیە، بـریتییە لە پێکەوە بەسـتانی ژمارەکـان دوان دوان پـێکەوە، ئەو دوو ژمـارەی کە پـێکەوە دەیانبەسـتینەوە، ئەنجـامی کۆکردنەوەیـان یەکسـانە، بـۆ نمـوونە: **یەکەم ژمـارەی زنجیـرەکە کە بـریتییە لە 1 و کۆتـا ژمـارەی زنجیـرەکە کە بـریتییە لە 100 کە پـێکەوە دەکـاتە 101**، وە دووەم ژمـارەی زنجیـرەکە کە بـریتییە لە 2 و دووەم ژمـارەی زنجیـرەکە لە کۆتـایی بـریتییە لە 99 ، ئەو دوو ژمـارە بەیەکەوە دەکـاتە 101، ئیتـر بەم شـێوە، پرسـیار: چەنـد جـووت لەو ژمارانەمـان دەسـت دەکەوێـت؟ وەڵامەکە ئاسـانە، لەبەر ئەوەی 100 ڕادەمـان هەیە، دابەشـی دوو دەکـاتە 50 جـووت لەم ژمـارانە، ئـەمەش واتە: $50 \times 101 = 5050$

وە لەمەوەش دەگەینە یاسا گشتییەکەی کە بریتییە لە:

$$1 + 2 + 3 + 4 + .. + n = \frac{n(n+1)}{2}$$



یەکبەدوای یەکی ئەندازەیی

Geometric progressions

یەکبەدوای یەکی ئەندازەیی، بریتییە لە یەکبەدوای یەکێک لە خشتەیەک ژمارە، کە ڕادەکانی ئەو یەکبەدوای یەکە، دروست دەبێت بە لێکدانی ڕادەکانی بە ژمارەیەک، واتە ژمارەیەک هەیە (Common ratio) کە بەشداربووی (Factor) هەموو ڕادەکانە، وەک:

$$1،4،16،64،256، \dots$$

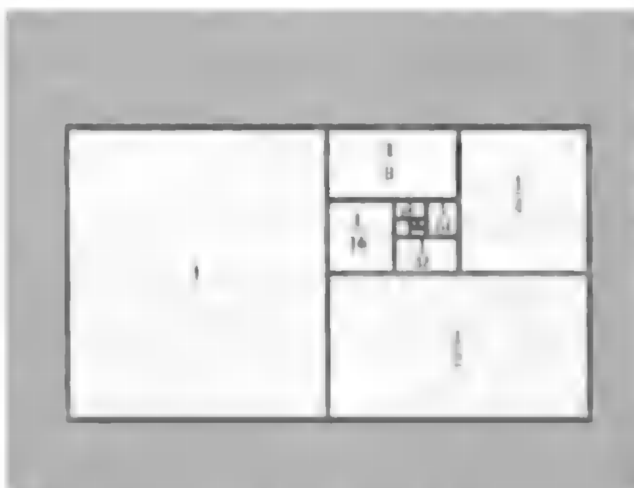
کاتێک کە ئەو ژمارە نەگۆڕەی کە جارانی هەر ڕادەیەک کراوە بۆ دروستکردنی ڕادەی پاش خۆی، بریتییە لە 4 ،کە ئێمە بە r هێمای بۆ دەکەین. کۆکردنەوەی هەندەکی-بەشێکی یەکبەدوای یەکی ئەندازەیی بەم شێوەیە دەردەبڕدرێت:

$$Sn = a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^n$$

ئەگەر ئەم ژمارە r لە یەک گەورەتر بوو، ئەوە ئەم زنجیرەیە زنجیرەیەکی لێکدورکەوتووە بۆ ناکۆتای ئەرێنی یان ناکۆتای نەرێنی. ئەگەر ئەم ژمارە r لە یەک بچوکتر بوو، ئەوە زنجیرەکە لێکنزیبووە، کە بەم یاسایە سەرجەمی زنجیرەکە دەدۆزرێتەوە:

$$S = \frac{a}{1 - r}$$

یەکـــبەدوای یەکـــی ئەنـــدازەیی گرنگییەکـــی زۆری هەیە لە کێشـــە بیرکارییەکـــان، پەیوەنـــدی بە گەشەســـەندنەوە هەیە و لە زۆر بـــوار لە رێـــگەی ئەم یەکـبەدوای یەکەوە لە گەشەســـەندنەکان تێـــدەگەین زۆرێـــک لە مشـــت و مـــڕی بیرکاریزانەکـــان لە روانـــگەی ئەم یەکـــبەدوای یەکە ئەندازەییانەوە بە کێشەکان و پاراداۆکسەکانی زینۆ دادەچنەوە.



هەمـــوو یەکـــبەدوای یەکەکـــان ناتوانـــدرێت بەهـــۆی ئەنـــدازەوە پیشـــانبدرێت، هەر شـــتێکیش کاتێـــک بەهـــۆی ئەنـــدازەوە نیشـــان دەدرێـــت، ئەوە تێگەیشـــتن لێـــی خۆشـــتر و ئاســـانترە. بـــۆیە لە بیرکـــاری شـــتێک هەیە پێـــی دەڵـــێن: ســـەلماندن بەبـــێ بەکارهێنـــانی وشـــە (Proof without words)، خـــۆی لە راســـتیدا وێـــنە تەنیـــا رێـــگەی داتاشـــینی ســـەلماندنەکان رۆشـــندەکاتەوە نەک زیاتر.

زنجیرەی هارمۆنی

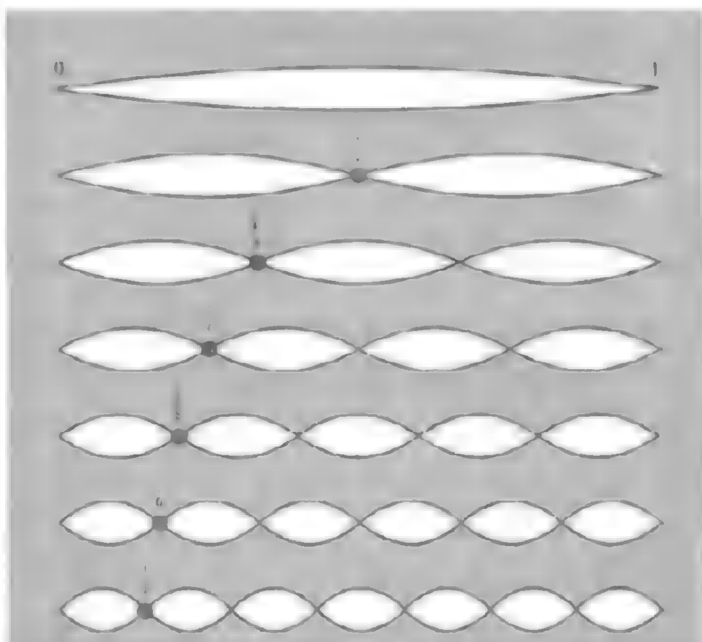
The harmonic series

زنجیرەی هارمۆنی، بریتییە لەو زنجیرەی- یەکبەدوای یەکانەی کە بێ سنور لە کەمی دەدەن (کەرتن). ئەم زنجیرەیە لە تیۆری مۆیسقا[52] گرنگییەکی زۆری هەیە، ئەم شێوەی خوارەوە، نمونەیەکە:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots$$

ئەوەی جێگای سەرنجە لەم زنجیرەیە یان لەم یەکبەدوای یەکە، ئەوەیە هەرچەندی ڕادەکان بۆ ناکۆتا بڕۆن، ئەوە زیاتر گرژ و بچوکتر دەبنەوە بەرەو سفر. لەم زنجیرانە هەر ڕادەیەک، بەتەنیا گەورەترە لە کۆی چەند ڕادەیەکی دوای خۆی، نمونە: $(\frac{1}{3}+\frac{1}{4})$ گەورەترە لە: $(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8})$.

52 زنجیرەی هارمۆنی لە ئامێری دەف و ژەنینی دەف بە نا-ڕاستەوخۆ بوونی هەیە، کەسی دەف ژەن بەکاری دێنێت بۆ دروستکردنی تەکنیک لەکاتی ژەنینی دەفە و سۆلۆ.



زنجیرە هارمۆنییەکان لە فیزیا گرنگییەکی زۆر هەیە لە بابەتی شەپۆلەکان و بەیەکداچوونی شەپۆلەکان، بەم هۆیەوە تەفسیر بۆ چەندین دیاردە دەکرێت.

زنجیرە و نزیکەیی

Series and approximation

هەنــدێک لە ژمــارە بنچینەییەکــانی-گرنگەکــانی بیرکــاری، لە ڕێــگەی زنجیــرە ناکۆتاکــانەوە لەدایــک دەبــن، هەر بــۆیە زنجیرەکــان ڕێگــایەکن بــۆ دۆزینــەوەی هەنــدێک ژمــارە بە نزیکەیــی، وەک: پــای π یــان e و هەنــدێ لە لۆگــاریمتە سروشــتییەکان. لەمەو پــێش زنجیــرەی هارمۆنیمــان بــاس کــرد، کە بەم شێوە بوو: $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots$

ئەگەر بێــــت و نیشــــانەی ڕادەی یەکەم لەو زنجیــــرە هــــارمۆنییەی ســــەرەوە بکەیــــنە (−)، نیشــــــانەی ڕادەی دووەم (+)، نیشــــانەی ڕادەی سێیەم (−) .... ، بەم شــێوە تــا ناکۆتــا، ئەوە ئەنجــامێکی ســەیرمان دەســت دەکەوێــت، ئەویــش لۆگــاریتمی سروشــتی 2. هەر هەمــان زنجیــرە ئەگەر بێــت و ژێــرەی کەرتەکــان هەمــووی دووجــا بکەیــن، ئەوە نرخێکــی سەرنجراکێشــمان دەســت دەکەوێــت، ئەویــش: $\frac{\pi^2}{6}$. لە ڕاســتیدا تــوانی ژمــارەی کەرتەکــان چەنــد بێــت، ئەوە لە ئەنجــام پــای بەو هێــزە-توانەمــان دەســتدەکەوێت. لە کۆتایــدا، ئەگەر ژێــرەی هەر کەرتێــک، ژمــارەکە بگــۆڕین بــۆ 'لێکــدراوی' ئەو ژمــارەیە، ئەوە e مــان دەســتدەکەوێت! لێکــدراوی ژمارە (Factorial) بۆنمونە:

$$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$$

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\cdots=ln(2)$$

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{6^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}$$

$$1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}+\frac{1}{6^4}+\cdots=\frac{\pi^4}{90}$$

$$1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}+\cdots=e$$

$$1+\frac{1}{2\times 1}+\frac{1}{3\times 2}+\frac{1}{4\times 3}+\cdots=2$$

زنجیرەی توانی

Power series

زنجیـــرەی تـــوانی، ئەو زنجیـــرەیە کە ڕادەکـــانی هێـــز-توانیـــان هەیە، توانەکـــانیش لە بەرزبـــوونەوەدان بە زیـــادبوونی هەر ڕادەیەک. زنجیـــرەی ئەنـــدازەیی بـــارێکی شـــازە لە زنجیـــرەی تـــوانی. زنجیـــرەکە بەو شـــێوە دەنووسرێت کاتێک x گۆڕاوەکەمان بێت:

$$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots$$

کاتێک کۆلکەی هەموو ڕادەکان بریتییە لە (یەک).

زنجیـــرەی تـــوانی بـــابەتێکی زۆر گشـــتی و گـــرنگە، کە زۆرێـــک لە نەخشـــەکان دەتوانـــدرێت بە شـــێوەی ئەم زنجیـــرەیە بنووســـرێت، ئەمەش ڕۆڵـی ســـەرەکی هەیە لە چارەســـەری هەنـدێک لە کێشـــەکانی بیرکـاری، بـۆ نمـونە ئەو نەخشـانەی نـاتوانین ڕاســتەوخۆ تەواوکـاری یـا داتاشـراوەیان بـۆ بـــدۆزینەوە، ئەوە لە ڕێـــگەی زنجیـــرەی نەخشـــەکە تەواوکـــارییەکەی یـــان داتاشـــراوەکەی هەژمـــار دەکەیـــن بە شـــێوەیەکی نزیکەیـــی. ئەگەر هـــاتوو کۆلکەی هەموو ڕادەکان سفر بوو، ئەوە دەچێتەوە بابەتی ڕادەدارەکان.

لێـــرە پرســـیارێک دروســـت دەبێـــت، ئایـــا زنجیـــرە توانییەکـــان زنجیرەیەکـــی لێکنزیکبـــووە؟ بە بەکارهێنـــانی تیـــۆری یەکـــبەدوای یەکـــی ئەنـــدازەییەکان، دەتـــوانین بڵـێین، ئەگەر هـــاتوو نرخـــی x لە نێـوان (1-) و (1)

بـــوو $(-1 < x < 1)$، ئەوە بەشـــە کـــۆکردنەوەی ئەم زنجیـــرەیە، لێکنزبـــووە بـــۆ $\frac{1}{1-x}$. بـــێ گومـــان هەمـــوو زنجیـــرە توانەکـــان نـــاچنە ژێـــر بـــاری ئەم یاسایەوە.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n = a_0 + a_1(x-c)^1 + a_2(x-c)^2 + a_3(x-c)^3 + \cdots$$

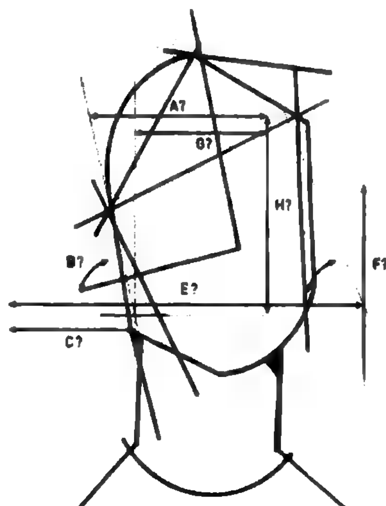
$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n = a_0 + a_1 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \cdots$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$$

بەشی چوارەم

ئەندازە

Geometry



ناساندنی ئەندازە

Introducing geometry

ئەندازە، بریتییە لە لێکۆڵینەوە لە شێوەکان (shapes)، قەبارە، شوێن -پێگە و بۆشایی- ئاهووتە. لەگەڵ ئەوەش، وەسفی خاڵ و راستەهێڵ و چەماوەکان دەکات لە رووتەختەدا. یەکەم جۆری ئەندازە، بریتییە لە "ئەندازەی ئیقلیدی"، ئەو ئەندازەیەی هەر لە قۆناغی ناوەندی پێی ئەشنا دەبین. کە مێژووی ئەم ئەندازەیە دەگەرێتەوە بۆ 300 سال پێش زاین کە لە لایەن "ئیقلید" لە گریک گەشەی سەند[53]. ئەندازەی ئیقلیدی لە چەند بەڵگە نەویستێک[54] پێکهاتووە، کە تەواوی بیردۆزەکان لە مەر ئەندازەی ئیقلیدی بە هۆی ئەم بەڵگە نەویستانەوە سەلمێنەی بۆ کراوە. ئیقلید لە پەرتوکەکەی بە ناوی دانەکان (Elements) سەرجەم بیرۆکە ئەندازەییەکانی لە دوو تویی 13 پەرتوک خستوتە روو. ئەندازەکەی ئیقلید 5 بەڵگەنەویست (Axioms) لە خۆ دەگرێت، کە ئەمانەن:

i. بەهۆی هەر دوو خاڵێک، دەتوانین راستەهێلێک بکێشین.

ii. بەشێکی راستەهێڵ دەکرێت بۆ ناکۆتایی درێژبێتەوە.

iii. بازنە دەتواندرێت لە هەر نیوەتیرەیەک و هەر چەقێک بکێشرێت.

iv. هەر دوو گۆشەیەکی راست یەکسانن.

---

[53] ئەندازە بەر لە یۆنانییەکان بوونی هەبوو، وەک لە شارستانییەتی میصر.

[54] بەڵگە نەویست، وتەیەکە-دەستەواژەیەکە بە راست دادەندرێت بە بێ سەلماندن.

٧. بۆ هەر راستەهێڵێکی دراو کە خاڵێک هەبێت نەکەوێتە سەر راستەهێڵەکە، ئەوە راستەهێڵێک هەیە بەو خاڵەدا دەڕوات و راستەهێڵەکەی تر نابڕێت (راستەهێڵێکی تەریب).

لەگەڵ ئەوەش، لە بەڵگەنەویستەکانی ئیقلید چەند شتێک بەبێ تەفسیر مانەوە، وەک راستەهێڵ، خاڵ، گۆشەی راست و نیوە تیرە. دوای ئەوەی لە سالانی (1800) چەند بەڵگەنەویستێکی تر ناسێندرا، کە ئەوەش بوە هۆی گەشەسەندنی ئەندازە و رژێمی-سیستەمی بەڵگەنەویستەکان.



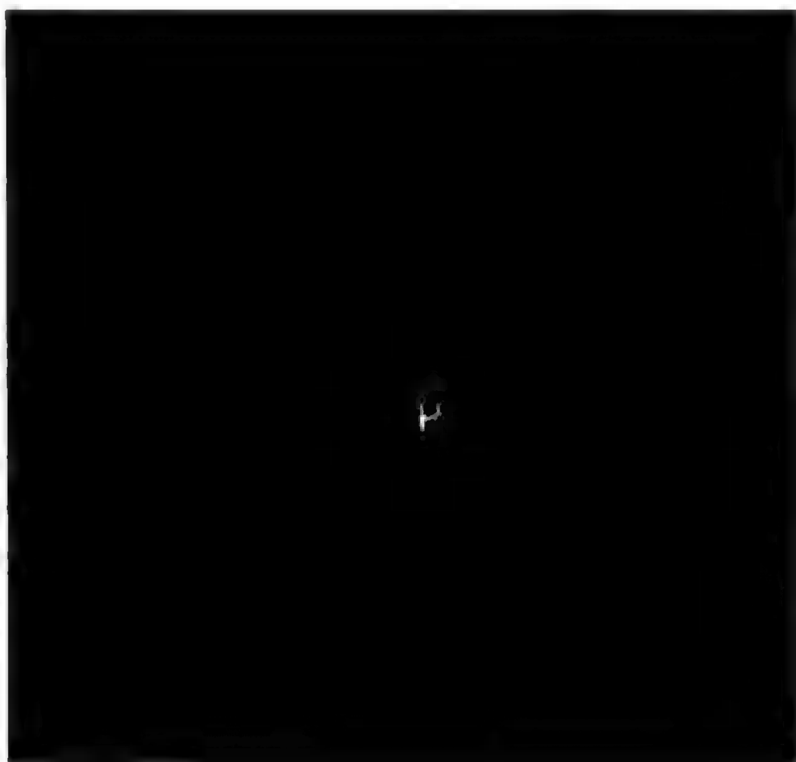
ڕاستەهێڵەکان و گۆشەکان

Lines and angles

ڕاستەهێڵ و گۆشە، دوو بابەتی زۆر سەرەکین لە ئەندازەزانیدا. ئەم دووانە کرۆکی ئەندازەن. بەڵگەنەویستی پێنجەمی ئیقلید دەڵێت: ئەگەر ڕاستەهێڵێکمان هەبێت و خاڵێک هەبێت نەکەوێتە سەر ئەو ڕاستەهێڵە، ئەوە ڕاستەهێڵێک هەیە بەو خاڵەدا دەڕوات و ڕاستە هێڵەکەی تر نابڕێت. بەڵام خۆ دەکرێت ئەو ڕاستەهێڵە بە خاڵەکەدا بڕوات و ڕاستەهێڵەکەی تر ببڕێت!

چەمکی گۆشە، بریتییە لەو چەمکەی یان ئەو پێداوستییەی کە تێیدا وەسفی ئەوەمان بۆ دەکات چۆن ڕاستەهێڵەکان یەکتری دەبڕن، ئایا کراوەی ئەو یەکتربڕینە چەندێکە. وادانێ دوو ڕاستەهێڵمان هەیە یەکتری دەبڕن لە خاڵی p ، وەک لە وێنەکە نیشاندراوە. لەم بارەدا، بازنەیەک کە چەقەکەی بریتییە لە p، دابەشدەبێت بۆ چوار بەش؛ چوار بەشە ڕاستەهێڵ (Segment) دەکەونە ناو بازنەکە، ئەگەر ئەو چوار بەشە ڕووبەری یەکسان داگیر بکەن لە ناو بازنەکە، ئەوکات ئەو بەشە ڕاستەهێڵانە پێیان دەوترێن ئەستوون (perpendicular) وە گۆشەکان گۆشە وەستاو دەبن (Right angle)، واتە گۆشەی پلە 90. ئەمەش پەیوەندی بە بەڵگەنەویستی چوارەمی ئیقلیدەوە هەیە. لە باری جیاوازدا، گۆشەکان بە پلە پێوان دەکرێت.

هەر چەندە ئەندازە زۆر لە پێش گریکەکان بوونی هەبووە، لە شارستانییەکانی تری وەک: بابلییەکان و میصرییەکان، بەڵام بەو شێوە نەبووە کە ئیقلید باسی کردووە.



پێوانەکردنی گۆشەکان

Measuring angles

پێــــوانی گۆشــــە بە یەکەی "پــلە" دەبێــت. لە کۆنــدا، پێــوانەکردنی گۆشــەکان لە نێــوان دوو راســتەهێڵدا کە یەکتریــان بڕیــووە، پێــوانەکراوە بەهــۆی کێشــانی بــازنەیەک بە دەوری ئەو خــاڵەی کە دوو راســتەهێڵەکە یەکتریــان تێدا بڕیــووە، پاشــان دابەشــکردنیان بــۆ چەنــد یەکەیەکــی یەکســان. شارســـــتانییەتی نێـــــوان دوو ڕووبـــــار[55] و ئەستێرەناســـــەکانی ئەو شارســتانییەتە، بیرۆکەیەکــی نوێیــان بە جیهــان ناســاند، ئەویــش ئەوە بــوو دەورێکــی بازنەیــان بە 360 مەزنــدەکرد، وەک ئەوەی ئەمــڕۆ ئــێمە کــاری پێدەکەین و لە قوتابخانە و ناوەندە ئەکادیمییەکان دەیانخوێنین.

هەروەهــا هەر ئەوان بــوون کاتژمێریــان دابەشــکرد بــۆ 60 خــولەک، هەر خولەکێــک بــۆ 60 ســانییە-چــرکە. دەشــێت 60 مەزنــدەکردبێت لەبەر ئەوەی 60 بەســەر 1،2،3،4،5،6 و چەنــدین ژمــارەی تــر دابەش دەبێــت. ســەرەڕای ئەمــانەش، ئەو شارســتانییەتە لە بــڕی بەکــار هێنــانی ڕژێمــی دەیــی، ڕژێمێکــی تــایبەت بەخۆیــان داهێنــا، ئەویــش "ڕژێمــی شەســتی" بــوو، هەر لەو ســۆنگەیەوە، ئەو دابەشــکردنانەی لەســەرەوە باســمان کــرد، گشــتی لە ڕێــگەی ئەو ڕژێمەوە سەر ئاو کەوتووە.

[55] نێوان دیجلە و فورات.



why 360 بۆچی

بۆچی دەورێکی بازنە 360 پلەیە؟ ئایا هەرگیز بیرت لێکردۆتەوە کە بۆچی 360 ؟ ئایا ئەم ژمارەیە بە هەرەمەکی (Randomly) هەڵبژێردراوە؟ بۆچی ژمارەیەکی تر نەبوو، وەک: 400 یان 500 یانیش ...هتد؟ نهێنی پشت ئەم ژمارەیە چییە؟ لێرە هەوڵ دەدەین وەڵامی ئەم چەند پرسیارەی سەرەوە بدەینەوە.[56]

لێرە پێویستە شتێک بخەینە ڕوو؛ کە ئەم ژمارەیە بۆ بازنەی بچوک یان گەورە هەر هەمان ژمارەیە. هەڵبژاردنی ئەم ژمارەیە بۆ دەورێکی بازنە 360، بۆ یەکێک لەم هۆکارانە دەگەڕێتەوە، ئەمەش واتای ئەمەیە وەڵامێکی تەواو دڵنیا بوونی نییە لەم بارەیەوە، بەڵام وەک ئاماژەمان پێدا دەشێت بۆ چەند هۆکارێک بگەڕێتەوە، هۆکارگەلێک کە زۆر جوان و ڕازیکەرە بۆ ئەم مەبەستە. ئەم هۆکارانەش دەگەڕێتەوە بۆ چەند هەزار ساڵێک بەر لەئێستا لە لایەن بابلییەکان و گریکەکان...

هۆکاری یەکەم (درێژی ساڵ):- ئەگەر هەتاکو ئێستا بیرت لەم ژمارەیە (360) نەکردۆتەوە، ئەوە گرەو دەکەین کە تۆ لە ماوەی بیرکردنەوەت بۆ چەند خولەکێک لەم ساتەی ئێستادا لەمەڕ ئەم ژمارەیە، دڵنیاین کۆمەڵێک ئەگەرت بۆ دێتە پێش، ئەگەر هەتاکو ئەم چەند خولەکەش کە ئەم بابەتە ئەخوێنیتەوە و دڵنیا نیت و بیرت بۆ هیچ شتێک

[56] ئەم بابەتە لە پەرتوکەکە باس نەکراوە، بەڵام بە پێویستم زانی کە زیادی بکەم.

ناچێت، ئەوە با بۆت ئاسان بکەین، ئایە ئەم ژمارەیەت (360) لەکوێی تر بەرچاوت کەوتووە یان بەر گوێت کەوتووە؟ بۆیە بیر لە ساڵ و ڕۆژ بکەرەوە ؟ زەوی ساڵێکی دەوێت تاکو خولێک بەدەوری خۆر تەواو بکات، ساڵێک زیاتر یان کەمتر (بەرێژەیەکی کەم) هەر لە نێوانی 365 ڕۆژ دایە، بەڵام لە ساڵنامەی بابلییەکان و فارسەکان؛ ساڵنامەکانیان لەسەر 360 دامەزراندبوو، بەڵام لەهەندێ شارستانی تر کەمتر بوو، بەم جۆرە دەشێت وەک هاوسەنگییەک لە نێوان ئەم شارستانییانە 360 هەڵبژێردرابێت.

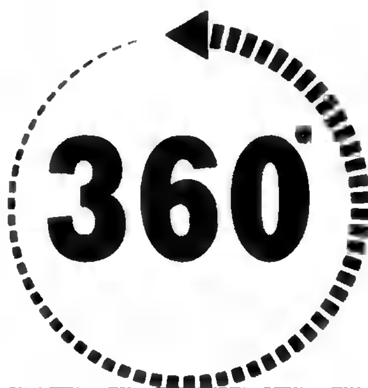
هۆکاری دووەم (بابلییەکان و سیستەمی ژمارە شەستی):-

بابلییەکان سیستەمێکی ژمارەیی گەلێک نایاب و دانسقەیان دارشتووە، کە لە مێژوودا بە "سیستەمی شەستی" ناسراوە و هەتا ئەمڕۆش لە پێوانی زەمەندا بەکاردێت، یەک کاژێر شەست خولەکە و یەک خولەک شەست چرکەیە. کە پێشی ئەڵێن سیستەمی سەکساگەسیمال. بابلییەکان بە سەرنجدانیان لە ناو بازنەیەک ئەگەر هاتوو نیوە تیرەکەی بزانین، ئەوە دەتوانین 6 سێگۆشەی لایەکسان (کە درێژی لایەکانی ئەکاتە نیوەتیرەی بازنەکە) بکێشین. لەبەر ئەوەی لای بابلییەکان ژمارە 60 وەک بنچینەیەک بۆ کارەکانیان بەکاردەهێنا، بۆ هەر یەک لە سێگۆشەکان ژمارە 60 پێدا (دەشێت وەک هێما-سیمبول زۆر جار 60 بەکارهێنابێت بۆ نواندنی شتێک) دواتر بەلێکدانی (لەبەر ئەوەی 6 سێگۆشەی لایەکسان هەیە) 6 بە 60 ، ژمارە 360 چنگ خستووە..

هۆکـــاری ســـێیەم (360 وەک ژمـــارەیەکی دابەش- Composite number):- دەشـــێت هۆکارێـــک بـــۆ خۆشویســـتی ژمـــارە 360 ئەوەبوو بێـــت کە ئەم ژمـــــارەیەک کۆمەڵێـــــک کـــۆلکە (factor) هەیە کە 24 کـــــۆلکەیە، کەئەمانەن:

1،2،3،4،5،6،8،9،10،12،15،18،20،24،30،36،40،45،60،72،90،120،180،360

بـــۆیە هەر بە ئاســـانی دەتوانـــدرێت بـــازنە بەســـەر 12 بەش دابەش بکرێـت (ســەعات-کـاژێر) کە گۆشــەی نێـوان هەر کاژێرێـک دەکـاتە 30 پـلە. (بیـــربکەرەوە، ئەگەر گۆشـــەی نـــاو بـــازنە 100 بـــوایە، لە کـــاتژمێر چـــی روویـــدەدا؟). بـــۆیە هۆکـــاری ســـێیەم ئەوەبـــوو کە 360 ژمـــارەیەکی دابەشـــی گەورەیە کە کـــۆلکەیەکی زۆری هەیە. واتە ژمـــارەیەکی تەواوی گەورەتـــری نزیک لە 360، ژمارەی کۆلکەکانی کەمترە لە کۆلکەکانی ژمارە 360.

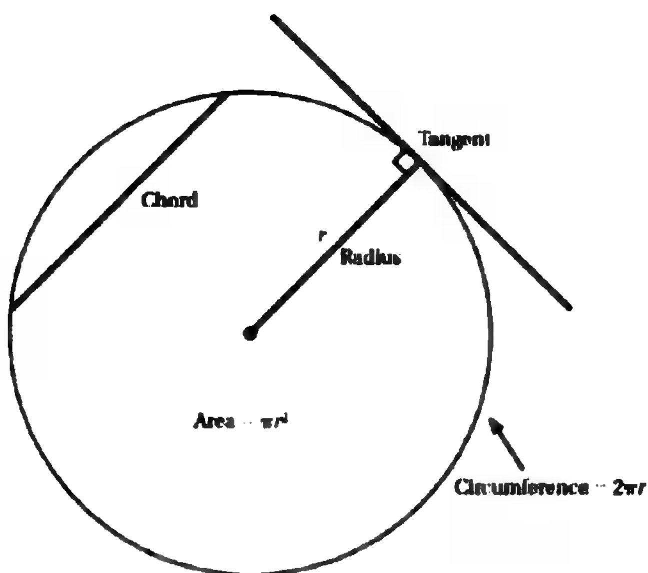


بازنە

Circle

بـــازنە، بـــریتییە لە کــۆمەڵەی A هەمـــوو ئەو خـــاڵانەی، کە دوورییەکـــی یەکســـانیان هەیە لە خاڵێـــک کە پێـــی دەوترێـــت: چەق. دووری نێـــوان چەق (Center) و خاڵەکـــانی دەوری چەق، پێـــی دەوترێـــت: نیـــوەتیرە (Radius). بـــازنە یەکـــێکە لەو شـــتە ســـەرەتاییانەی لە بەڵگەنەوســـتەکانی ئیقلیـــد بونیـــان هەیە. چەمـــاوەی داخـــراوی ئەو خـــاڵانەی کە دەوری چەقیـــان داوەی، پێـــی دەوترێـــت: چێـــوە (Circumference). چـــۆنییەتی دۆزیـــنەوەی ئەو چێـــوەیە بـــۆ بـــازنەیەک کە نیـــوە تیـــرەکەی بـــریتییە لە r، دەکـــاتە: $C = 2\pi r$. بە هەمـــان شـــێوە، بـــۆ هەژمـــارکردنی ڕووبەری بـــازنەیەک بە زانینـــی نیـــوەتیرەکەی، ڕووبەر دەکاتە: $A = \pi r^2$.

هەر لە بـــابەتی بـــازنەوە چەنـــد شـــتێکی تـــر پێناســـەدەکرێت، ڕاســـتەهێڵ و ڕووبەر. شـــتێکی ترمـــان هەیە پێـــی دەوترێـــت: کەوانە (arc) کە بـــریتییە لە بەشـــێکی چێـــوەی بـــازنە. بـــابەتێکی تـــر هەمـــانە پێـــی دەوترێـــت: ژێ (chord) کە بـــریتییە لەو هـــێڵەی کە بە دوو خـــاڵی ســـەر چێـــوە تێپەڕدەبێـــت، ئەو نـــاوچەی دەکەوێـــتە نێـــوان ڕاســـتەهێڵی ژێ و چێـــوەی بـــازنەکە، پێـــی دەوترێـــت: بەشـــە ڕووبەر. ڕاســـتەهێڵی لاریمـــان هەیە (Tanget Line) کە بەرکەوتنـــی لەگەڵ یەک خاڵی چێوەی بازنە هەیە.

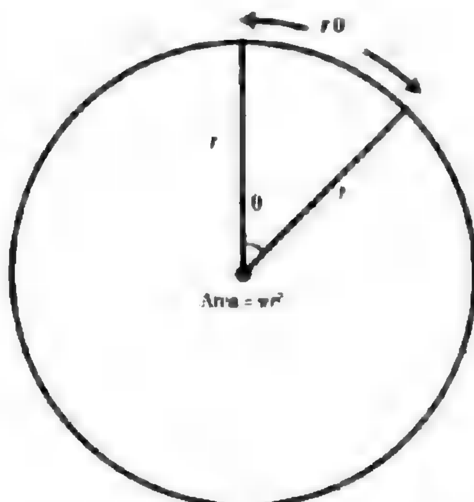

Tangent
Chord
r
Radius
Area = πr^2
Circumference = $2\pi r$

گۆشەی نیوەتیرەیی

Radian angle

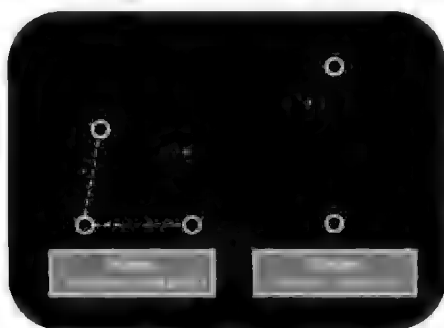
یەکێــک لە شــوێنگرەوەکانی پــلە (Degree)، بــریتییە لە گۆشــەی نیــوەتیرەیی. گۆشــەی نیــوەتیرەیش هەر لەســەر بنچــی بــازنەوە خەت و خــاڵی دارێــژراوە هەر وەک پــلە. لەگەڵ ئەوەش، گۆشــەی نیــوەتیرەیی ســودگەلێکی هەیە، بە تــایبەت لە هەمــبەر نەخشــە سێگۆشــەییەکان. گۆشــەی نیــوەتیرەیی بەوە پێناســە دەکرێــت کە پێــوانەی چەقە گۆشــەیەک لە بــازنەیەک کە نیــوە تیــــرەکەی بـــــریتییە لە r و کەوانەیەک (arc) درێـــژییەکەی بـــریتییە لە r دیاردەکات ئەگەر بازنەی "یەک" ەت (circle unit) بەکارهێنا.

بــۆ ئەوەی لەمە حــاڵی بــین، وا دانــێ بازنەیەکمــان هەیە نیــوە تیــرەکەی بــریتییە لە 1، لەبەر ئەوەی چیــوەی بــازنە دەکــاتە: $C = 2\pi r$ ، ئەگـــــــەر $r = 1$، ئەوە $c = 2\pi$. بـــــۆیە پـــــارچەیەک x (Portion) لە بـــــازنەکە، گۆشـــەی θ ی نیـــوەتیرەیی هەیە، کاتێــک $\theta = 2\pi x$. نمــونە: پــارچەکردنی بــازنەکە بــۆ چــوار بەشــە راســتەهێڵ (Segment)ی یەکســان، ئەوە گۆشــەی پلە 90 پێ دەدات، کە ئەوەش دەکاتە 2π جارانی $\frac{1}{2}$ یان $\frac{\pi}{2}$ نیوەتیرەیی.



دەتـوانین گۆشـەیەک لە پلە بگـۆڕین بـۆ گۆشـەی نیوە تیرەیـی، بەهـۆی لێکـدانی پـلەکە بە: $\frac{\pi}{180}$. یـان بە پـێچەوانەوە، لە گۆشـەی نیـوەتیرەی بـۆ پـلە، بەهـــۆی لێکـــدانی پـــلەکە بە: $\frac{180}{\pi}$. لەم ویـــنەی خـــوارەوە[57] زۆر باشـــتر لەو شیکردنەوەی سەرەوە تێدەگەین.

Degrees vs. Radians



[57] Math. better explained. Xalid Azad

سێگۆشەکان

Triangles

سێگۆشـــە (ســـێ لا)، بـــریتییە لە یەکێـــک لە شـــێوە ئەنـــدازەییە چەنـــد لایە هەرە باوەکـــان، کە دەتوانـــدرێت بە ســـێ خـــاڵی لێـــک جیـــاواز (Distinct)[58] بکێشـــرێت بە هـــۆی راســـتەهێڵییەوە، واتە لە ئـــاهووتەیەک[59](Space) ســـێ خـــاڵ دابنـــێن، هەر دووخاڵێـــک بەهـــۆی راســـتەهێڵەوە بەیەک دەگەیەنـــین بە شـــێوەیەک ئەو ڕووبەرەی دەکەوێـــتە نـــاوەوەی، تەنیـــا بە ســـێ خـــاڵ دەور درابێـــت و نەکـــرابێتە دووبەش. هەژمـــارکردنی ڕووبەری سێگۆشـــە، بەهـــۆی کێشـــانی لاکێشـــەیەک بە دەوری سێگۆشـــەکە، یەکـــێکە لە ڕێگاکـــان، واتـــا سێگۆشـــەکە بخەیـــنە نـــاو لاکێشـــەیەک. یـــان ئەگەر یەکێـــک لە لایەکـــانی سێگۆشـــەکە بە بنـــاغەکەی-بنچیـــنە (base) دابنـــێن، ئەوە ڕووبەر دەکـــاتە نیوەی بناغە جارانی بەرزییەکە، واتە: $Area_{triangle} = \frac{1}{2}\ h \times b$

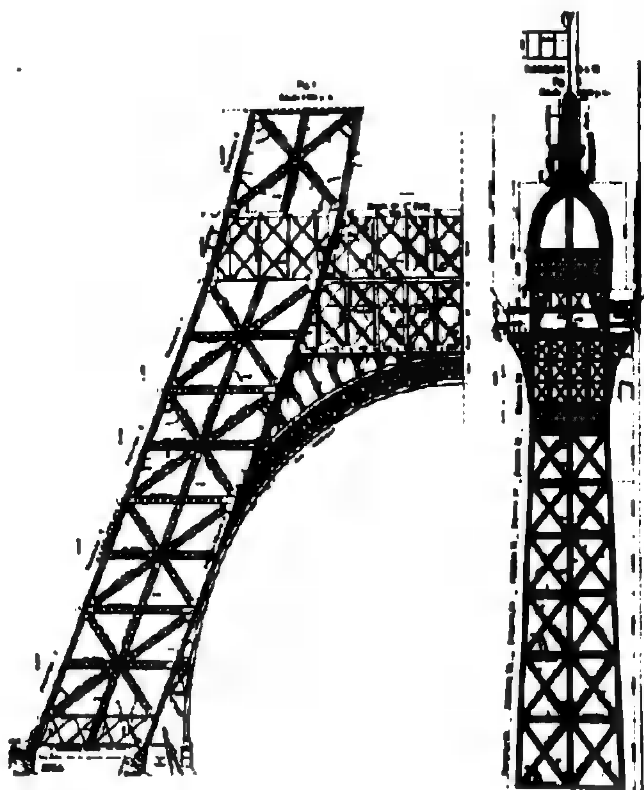
سێگۆشـــەزانی یەکـــێکە لە پایاکـــانی بیناســـازی، بە تـــایبەت بـــۆ ئەنـــدازیاران لە دروســـتکردنی پـــرد و دیـــوار و باڵەخانەکـــان، کە تێـــدا لە شـــتی زۆر ئاڵۆزدا ڕۆڵێکی گرنگ دەبینێت و کارەکانمان ئاسان دەکاتەوە.

---

58 وشـــەی "distinct"بـــۆ دانە (element) بەکاردێـــت. وشـــەی "disjoint" بـــۆ کـــۆمەڵە (set) بەکاردێت.

59 "ئـاهووتە" وشـەیەکی کـوردییە بەرامـبەر بە "space" ی ئینگلیـزی و "فەزا" ی عەرەبـی بەکارمان هێناوە.

جــگە لەمــــانەش، یەکێــک لە بیــــردۆزە هەرە ناودارەکـــان لەســـەر بنچیــنەی سێگۆشــەوە دامەزراوە، ئەویــش "بیــردۆزی فیســاگۆرس" لە هەمــبەر سێگۆشەیەک کە گۆشەیەکی پلە 90 هەیە.



جۆرەکانی-پۆلێنکردنی سێگۆشە

Types of triangle

لە سێگۆشـــەزانیدا، چەنـــد جـــۆرێکی سێگۆشـــەمان هەیە، ئەو سێگۆشـــەی ئـێمە باســـی دەکەیـن، بـریتییە لە سێگۆشـــەیەک کە کـۆی گۆشـــەکانی نـاوەوەی دەکـاتە 180 پـلە[60]. ئەوەشـــی وادەکـات بـاس لە جـۆری سێگۆشـــەکان بکەیـن و جیاوازی لە نێوانیان بکەین، بریتییە لە درێژی لایەکانی و گۆشەکانی.

پۆلێنکردنی سێگۆشەکان بە پێی درێژی لایەکانی:

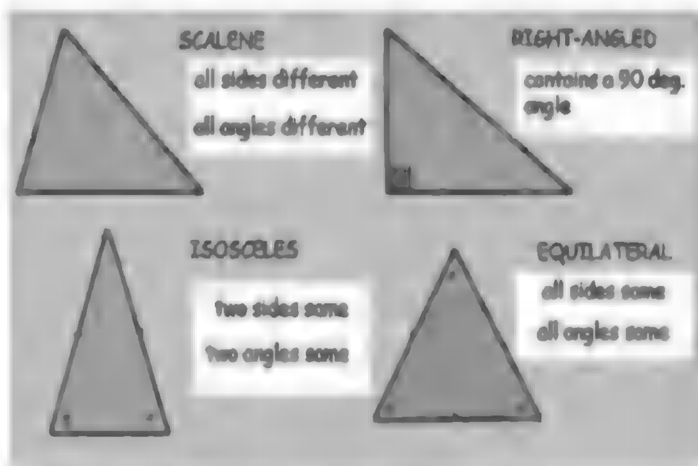
1- سێگۆشـــــەی ســـــێ لا یەکســـــان (Equilateral triangle): ئەو سێگۆشـــــەیە کە درێـــــژی هەر ســـــێ لایەکەی وەک یەکـــــن-جـــــووتن، واتە یەکسانە. کە هەر گۆشەیەکی دەکات 60 پلە.

2-سێگۆشـــــــــــەی دوولا یەکســـــــــــان (Isosceles triangle): ئەو سێگۆشەیە کە درێژی تەنیا دوولایەکەی وەک یەکن-جووتن.

3-سێگۆشـــــــەی گۆشـــــــە وەســـــــتاو (Right angle triagle): ئەو سێگۆشەیە کە گۆشەیەکی پلە 90 هەیە.

[60] مەبەســـــت لەمە کە کـــــۆی گۆشـــــەکانی نـــــاوەوەی دەکـــــاتە 180، لەبەر ئەوەیە کە سێگۆشـــەمان هەیە کە کـۆی گۆشـــەکانی نـاوەوەی زیـاترە لە 180 پـلە، هەشـمانە کەمتـرە لە 180. کە لە بابەتەکانی دواتر باسی لێوەدەکرێت.

4-سێگۆشـــەی جیـــالا (Scalence triangle): ئەو سێگۆشـــەیە کە درێـژی هـیچ لایەکـی وەک ئەوی تـر نیـیە-جـووت نیـیە، واتە هەر لایەکـی درێژییەکـی جیـاوازی لەوی تـر هەیە. سێگۆشـەی گۆشـە وەسـتا بـارێکی تایبەتە لە سێگۆشەی جیالا.



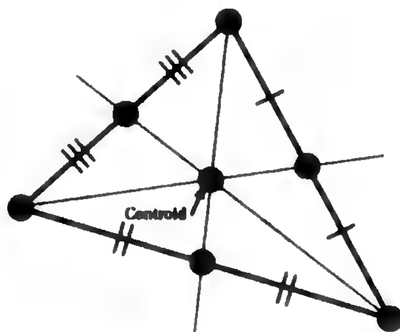
سێگۆشـــەزانی لە شارســـتانییەتی میصـــر ســـەریهەڵدا کەوت، بەهۆکـــاری دروســـتکردنی هەرەمەکـــانی میصـــر و نەخشـــاندنی بتەکـــان لە بەردەکـــان. لەگەڵ ئەمەش، زانـــا میصـــرییەکان زۆر بیریـــان لە لایەنـــی پەتـــی (Abstract)ی شـــتەکان نەدەکـــردەوە، لای ئەوان، بەکارهێنانیـــان گرنگتـــرین شت بووە.[61]

[61] وەرگێڕ.

چەقی سێگۆشە

The center of a triangle

چەنـــدین ڕێگـــا هەن بـــۆ ئەوەی بـــزانین چەقـــی سێگۆشـــەیەک بەوردی دەکەوێـــتە کـــوێ. یەکێـــک لە ڕێگاکـــان، ئەوەیە: گەورەتـــرین بـــازنە بکێشـــی لە نـــاو سێگۆشـــەکە، ئەو خـــاڵەی دەبێـــتە چەقـــی بـــازنەکە، دەبێـــتە چەقـــی سێگۆشـــەکەش. یـــانیش، چەقـــی بـــازنەیەک، کە چێـــوەی بـــازنەکە بە هەرســـێ ســـەری سێگۆشـــەکە تێـــپەڕ دەبێـــت. یەکێکـــی تـــر لە ڕێگاکـــان، بـــریتییە لە دەســـت نیشـــان کردنـــی ناوەڕاســـتی هەر یەک لە ســـێ لایەکەی سێگۆشـــەکە، دواتـــر کێشـــانی ڕاســـتەهێڵێک لە کـــوژبنی-ســـوچ هەر سێگۆشـــەیەک بـــۆ ئەو لایەی دەکەوێـــتە بەرامـــبەر کـــوژبنەکە، بەم شـــێوە ســـێ ڕاســـتەهێڵک دەکێشـــن، ئەو ســـێ ڕاســـتەهێڵە، لە کـــام خـــاڵ پێککەیشـــتن، ئەوە ئەو خـــاڵە دەبێـــتە چەقـــی سێگۆشەکە. وەک لە وێنەی خوارەوە زیاتر ڕوونە.



لێـــرە جیـــاوازی دروســـت نابێـــت کە سێگۆشـــەکە لە کـــام جـــۆری سێگۆشەکانە، ئەم شێوازە-میتۆدە بۆ گشتیان ڕاستە بە شێوەیەکی گشتی.

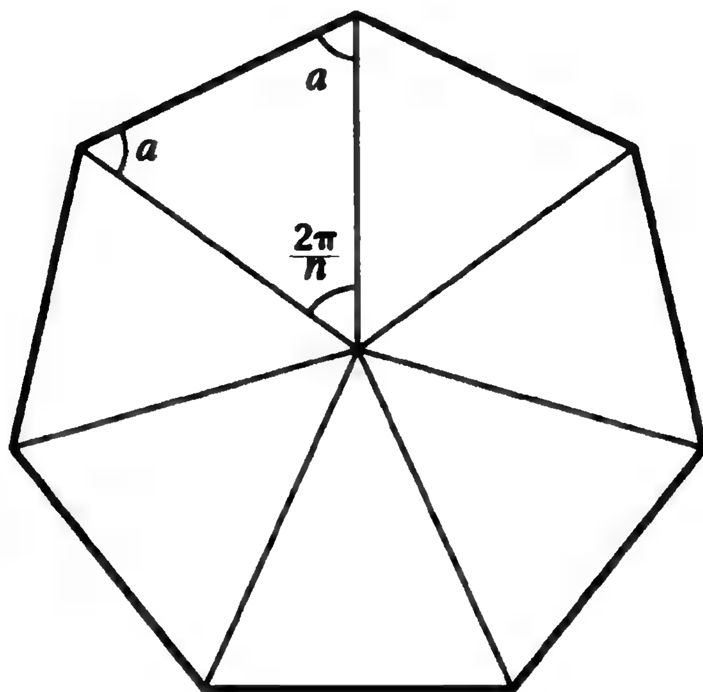
چەندلایەکان

Polygons

لە دێــر زەمــانەوە، چەنــد لایەکــان بەکارهــاتوون بــۆ ڕازانــدنەی باڵەخانەکــان و کــارە هونەرییەکــان، وەک: سێگۆشــەکان و لاکێشــەکان. چەنــد لایەکــان، بــریتیین لە شــێوەیەکی ڕووتەختــی داخــراو بە ســێ پــارچە ڕاستەهێڵ یان زیاتر (یان چەند گۆشەیەکی هەیە).

چەنــد جۆرێــک لە چەنــد لامــان هەیە، ئەوانەی ڕێکــن و ئەوانەی ڕێــک نــین. چەنــد لای ڕێــک، ئەو چەنــد لایەیە کە درێــژی هەمــوو لایەکــانی یەکســانن، وەک: پێــنج لا (Penatgon)، شــەش لا (Hexagon)، حەوت لا (Hebtagon)، هەشــت لا (Octagon) و تــا دوایــی. پێــنج لا (Pentagon) کە 5 لای ڕێکــی هەیە، دەتوانــدرێت بکێشــرێت بەهــۆی چەنــد سێگۆشــەیەکەوە کە دوو گۆشــە بەیەک دەگەن، کە ناســراوە بە سێگۆشــەی دوولا ڕێــک (Isosceles) کە لــووتکەی (Peak) هەر سێگۆشــەیەک بە یەکتــردەگەن لە چەقــی شــێوەکە، وەک لە وێــنەکەدا دیــارە. لەبەر ئەوەی دەوری ئەو چەقەی دروســت بــووە دەبێــت 2π بێــت ، ئەوە گۆشــەی لــوتکەی هەر سێگۆشــەیەک دەکــاتە: $\frac{2\pi}{n}$ کاتێــک n بــریتییە لە ژمــارەی سێگۆشــەکان یــان لایەکــانی چەنــد لایەکە. بــابەتێکی تــر، کە لە مەڕ سێگۆشــەکان دەیــزانین، ئەوەیە کە کــۆی گۆشــەکانی سێگۆشــە دەکــاتە π وە دەزانــین کــە کــۆی گۆشــە یەکــسانەکان دەکــاتە $2a$ ، واتــە $2a = \pi - (\frac{2\pi}{n})$.

هەروەهـــا ئەو بـــڕە $2a$ بـــریتییە لە نرخـــی هەر گۆشـــەیەکی نـــاوەکی (Internal)ی چەنـــد لایەکـــی ڕێـــک، وەک: پینتـــاگۆن (Pentagon) کاتیـــک n=5، ئەوە کۆی گۆشەی ناوەکییەکانی دەکاتە: $\frac{3\pi}{5}$.



هاوشێوەیی

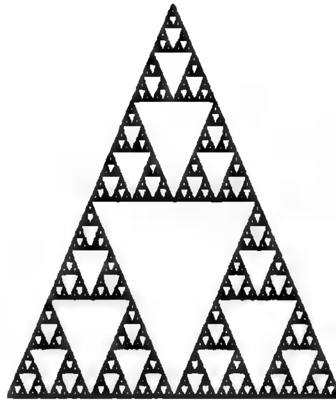
Similarity

دوو شــت یــان دوو شــێوە (Shapes) پێــان دەوترێــت هاوشــێوەن، ئەگەر هــات و ئەو دوو شــتە لە ڕووی شــێوەوە وەک یەکتــر بــن-هەمــان پێکهاتەیــان هەبێت. ئەمە یەکێکە لە ڕێگاکــان، چــونکە چەنــدین ڕێگــای تــر هەن بــۆ ئەوەی بڕیاربــدەین دوو شــت یــان دوو شــێوە (Shapes) هاوشــێوەن یــان نــا. لە ئەنــدازە، ئەگەر لەســەر سێگۆشــەکان بــدوێن، ئەگەر هەرســێ گۆشــەی سێگۆشــەیەک یەکســان بێــت بە گۆشــەکانی نــاو سێگۆشــەکەی تــر، ئەوە هاوشــێوەن، یــان ڕێــژەی درێــژی نێــوان دوو لای سێگۆشــەک یەکســان بێــت بە ڕێــژەی درێــژی دوو لای سێگۆشــەکەی تــر. کاتێــک لە شــێوە یــان شــتە ئەنــدازەییەکانی تــر ورد دەبیــنەوە، وەک چەنــدلایەکان (Polygons) و چەماوەکــان (Curve)، ئەوە شــتێکی تــر هەیە دەبێــت لێــیەوە بڕیــار بــدەین ئەو دوو شــتە هــاو شێوەن یــان نــا، وەک: دوو چەنــدلایەکی ڕێــک، هاوشــێوە دەبــن ئەگەر بێــت و هەمــان ژمــارە لایــان هەبێــت. لێــرە گەورەیــی و بچــوکی شێوەکان گرنگ نییە، بەڵکو جەوهەری شێوەکە گرنگە.

چەمکــــــی هاوشــــــێوەیی، یــــــان جێگــــــۆرکێی هاوشــــــێوەیی (Similarity transformation) بەکــاردێن بــۆ وەســفکردنی پێــوانەکردار (Scaling operation) کە شــتێک جێگــۆرکێی پێکــراوە بــۆ شــتێکی هاوشــێوە. "جێگــۆرکێی هاوشــێوەیی یــان لێکچــوو" بەجــۆرێکە کە هــیچ گۆڕانکــارییەک لە شــێوەی ئەو شــتەی هەمــانە دروســت ناکــات، تەنیــا لە

ڕووی بەرەوە نەبێت. واتە ئەگەر چوارگۆشەیەک کە درێژی لایەکانی 5 بێت، بمانەوێت گەورەتری بکەین، ئەوە بۆ هەر لایەک چەند یەکە زیاد بکەین، ئەوە بۆ لایەکانی تریش بە هەمان شێوە، ئەمەش واتا لە ڕووتەختی دیکارتی (Cartesian coordinates) لە کاتی جێگۆڕکێ، سەرجەم خاڵەکانی ئەو ڕووتەختە ئیقلیدییە جارانی هەمان ژمارە، واتە هەمان فاکتەر دەکرێت.

ئەم وێنەی خوارەوە بریتییە لە سێگۆشەی سیرپنسکی[62].



[62] سێگۆشەی سیرپینسکی (Sierpinski triangle) جۆرێک فراکتاڵە، کە لە سێگۆشەیەکی ڕێک یان لایەکسان دروست دەبێت. سەرەتا سێگۆشەیەکی لایەکسان لە ناوەڕاستی سێگۆشەی یەکەم جیا دەکرێتەوە، پاشان ئەم کارە لەسەر هەموو سێگۆشەکان دووبارە دەکرێتەوە. ناوی ئەم سێگۆشەیە، لە ناوی ماتماتیکزانی پۆڵەندایی "واکلام سیرپینسکی" وەرگیراوە، بەڵام چەندین سەدە بەر لە کارەکانی سیرپینسکی، ئەم سێگۆشەیە، وەکو شێوازێک بۆ ڕازاندنەوە کەڵکی لێ وەردەگیرا.

جووتبوون

Congruence

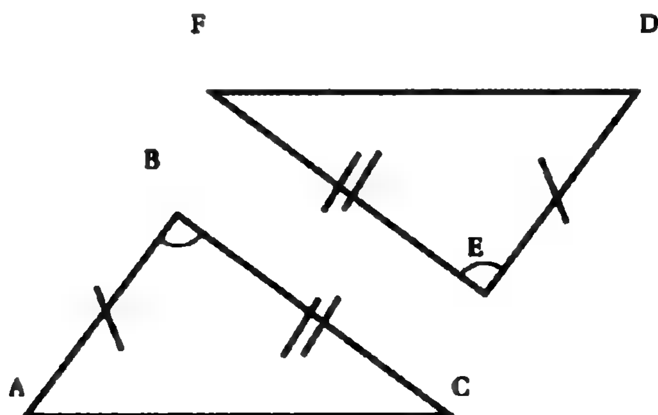
دوو شـــت پێیـــان دەوترێــت جووتـــدەبن، ئەگەر هـــاتوو ئەو دوو شـــتە لە شـــێوە؛ هەمـــان پێکهـــاتە و پێوانیـــان هەبێـــت. چـــۆنییەتی هەڵکەوتنـــی لە بۆشـــایی(Space) گرنـــگ نیـــیە. واتـــا دوو سێگۆشـــە کە درێـــژی لایەکـــانی و گۆشـــەکانیان هەمـــووی وەک یەکە، بەڵام وەک یەک لە بۆشـــایی دانەنـــراون؛ ئەوە جـــووت دەبـــن. نمـــونە: دوو بلـــۆکی وەک یەک، ئەگەر بلۆکێکیـــان بە بـــاری ســـتونی دانـــێن و ئەوەی تـــر بە بـــاری درێـــژی، ئەوە ئەو دوو بلـــۆکە جـــووت دەبـــن، گرنـــگ ئەوەیە هەردووکیـــان بلـــۆکن و پێکهـــاتە و پێوانیـــان هەمـــوو شـــتێکیان وەک یەکتـــرە، بە واتـــایەکی تـــر، ڕێـــژەی نێـــوان هەر پێکاهـــاتەیەکی شـــتەکە یـــان شـــێوەکە-جێگـــۆڕکێیەکە بـــۆ شـــێوەکەی تـــر، دەکاتە 1 (Scaling factor)[63] .

لە وێـــنەدا، دەکرێـــت دوو شـــتی لەم شـــێوە وێـــنەدانەوەی یەکتـــر بـــن. دوو سێگۆشـــە بەگشـــتی جووتـــدەبن ئەگەر بێـــت و هەر یەکێـــک لەمـــانەی دێـــن ڕووبـــدات، ئەوانـــیش: درێـــژی هەر ســـێ لایەکـــانی یەکســـان بـــن؛ درێـــژی دوو لە لایەکـــانی و گۆشـــەی نێـــوان ئەو دوو لایە لە هەردووکیـــان وەک یەک بێـــت؛ یـــان درێـــژی یەکێـــک لە لایەکـــان و ئەو گۆشـــەی کە گۆشـــەکانی تـــر

---

63 ڕێـــژەی جێگـــۆڕکێ (Scaling factor)،واتە ئەگەر لە سێگۆشـــەی یەکەم گۆشـــەیەکم هەبێـــت پـــلەکەی 90 بێـــت، ئەوە دەبێـــت لە سێگۆشـــەکەی تـــرت گۆشـــەیەکی پـــلە 90 هەبێـــت، ئەمەش دیارە کە ڕێژەی نێوانیان دەکاتە یەک : $\frac{90}{90} = 1$.

تەواودەکات، یەکسان بێت. بۆ هەریەکێک لەم سێ پێوەرە بەسە بۆ ئەوەی بڕیار بدەین دوو سێگۆشە جووت دەبن یان نا.



بابەتی جووت بوون لە ئەندازەدا، یارمەتیمان دەدات لە دۆزینەوەی ڕووبەر، قەبارە.... بۆ هەندێ لە شێوەکان. کاتێک لێکۆڵینەوە لە هەمبەر شێوەیەک گران و سەختە، ئەوە لە ڕێگەی شێوەیەکی تری ئەو شتەی هەمانە، کە لە گەڵ شێوە ڕەسەنەکەی خۆمان جووت دەبێت، کارمان ئاسانتر دەکات. وەک چۆن لە هەژمارکردنی π لە ناو بازنەیەک چەند لایەک دەکێشین، کە ئەو چەند لایە پێکەوە جووت دەبن...

بیردۆزی فیساگۆرس

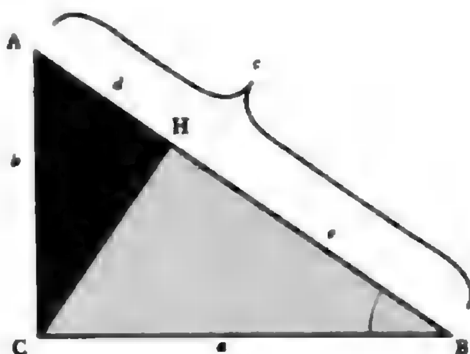
Pythagoras's theorem

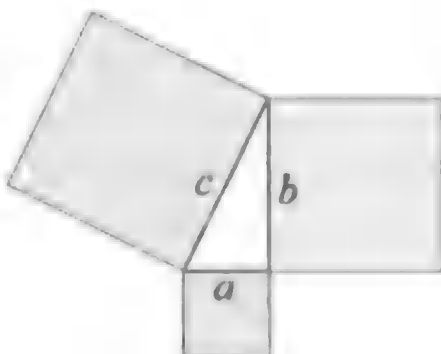
بیرۆدۆزی فیساگۆرس، یەکێک لە سیما هەرە دیارەکانی بیرکاری. قوتابی لە قوناغی ناوەندی ئاشنای ئەو بیردۆزە دەبێت. بیردۆزی فیساگۆرس، لای زۆرێک لە بیرکاریزانەکان، بریتییە لە جوانترین بیردۆزەکان، کە بە ڕادەیەکی زۆر سەرسامی پێوە■ دیارە. ئەم بیردۆزە پەیوەندییەکە لە نێوان گۆشە و درێژی لایەکانی سێگۆشەیەکی گۆشە وەستا، واتا سێگۆشەیەک کە گۆشەیەکی پلە 90 هەبێت. سەلماندنی ئەم بیردۆزەش لە ڕێگەی کێشانی سێگۆشەیەکی هاوشێوە■ (Similar) لە ناو سێۆگشەکە، وەک لە وێنەکە دا دیارە، یانیش لە ڕێگەی ڕووبەرەو■ لە دووجاکردنی هەر سێ لایەکەی سێگۆشەکە.

لە بنچینەدا ئەم بیردۆزە لە پێش یۆنانییەکان و فیساگۆرس بوونی هەبووە، کە لە شارستانییەتی بابلییەکان؛ ئەوان کاریان پێ کردووە، بەڵام لە کۆتاییەکانی سەدەی شەشەمی پێش زاین، گریکەکان کردیان بە ناوی خۆیانەوە[64]. ئەم بیردۆزە گرنگییەکی زۆری هەیە لە ئەندازە، فیزیا، وە

■ ئەم بیردۆزە چەندین سەلماندنی هەیە، پتر لە 300 سەلماندن، کە ڕێگاو شێوازی هەمەجۆر هەن. سادەترینیان بریتییە لە ڕێگەی کێشانی چوار لایەکی ڕێک لە ناو چوار لایەکی گەورەتر، لەم ڕێگەیەوە دەگەین بە پشتراستی ئەم بیردۆزە. ڕاستییەک سەبارەت بە سەلماندنەکەی، ئەویش ئەوەیە بابلییەکان دەیانزانی ئەم بیردوزە ڕاستە، بەڵام نەیاندەزانی بۆچی ڕاستە؟ ئەمەپرسیار بوو لایان، بەڵام وەک ڕوونە چەمکی سەلماندن لە

تەنـانەن تەوەرەی یۆنـانی دوو ڕەهەنـدی لەسـەر ئەم بیـردۆزەیە بنـاتنراوە. پەیوەنـدییەکی تـۆکمەش هەیە لە نێـوان ئەم بیـردۆزە و نەخشـە سێگۆشەییەکان لە چۆنییەتی دۆزینەوەی گۆشە.





یۆنانییەکـانەوە دەسـتی پێکـرد، هەر بـۆیە دەشـێت بەهـۆی سـەلماندنی ئەم بیـردۆزەوە، یۆنانییەکان بە موڵکی خۆیانی بزانن.

ساین، کۆساین و تانجێت

Sine، cosine، and tangent

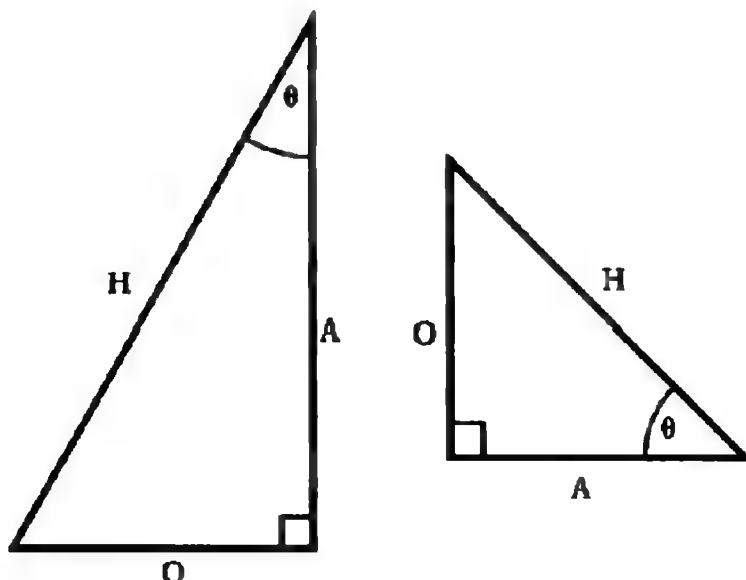
سێگۆشـــەی گۆشـــە وەســـتا، بـــواری ئەوەمـــان دەدات کە لە پەیوەنـــدی گۆشـــە و درێـــژی لایەکـــانی زیـــاتر تێـبگەین، هەر بـۆیە لە بیرکـــاری ئەمـــانە بە نەخشـــە سێگۆشـــییەکان ناســـراون، کە ســـەرەکیترینییان بـــریتیین لە نەخشەکانی ساین، کۆساین و تان.

بـــۆ ئەوەی پێناســـەی ئەو نەخشـــانە بکەیـــن، ســـەرەتا وا دانـــێن گۆشـــەیەکمان هەیە θ، کە ئەم گۆشـــە پـــلەکەی 90 نیـــیە. ئەو گۆشـــە دەکەوێـــتە نێـــوان دوو لا H و A، کە ئە دوو لایە ســـەرێکی هاوبەشـــیان هەیە (وەک لە وێـــنەکە دیـــارە). ئەو دوو لایەش پێـــان دەوترێـــت: هاوســـێ-دیـــوار بە دیـــوار. لەســـەرەوە باســـی دوو لامـــان کـــرد، لای ســـێیەم پێـــی دەوترێـت لای بەرامـبەر (دژ) کە نـاوی O مـان لـێ نـاوە. ئەو ســێ نەخشـەیە: ساین، کۆساین و تانجێت بەو شێوە پێناسەکراوە:

$$sin(\theta) = \frac{O}{H} \quad ؛ cos(\theta) = \frac{A}{H} \quad ؛tan(\theta) = \frac{O}{A}$$

لەبەر ئەوەی هەر دوو سێگۆشـــــەیەکی گۆشـــــە وەســـــتاو، لەگەڵ گۆشـــەی θ وەک لەبەرگیـــراوەی یەکتـــر وان، ئەوە نەخشـــەکان هەر هەمـــان وەڵامـــان لێـــان دەســـت دەکەوێـــتەوە بـــێ گوێـــدانە قەبـــارەی سێگۆشـــەکە، وە چونکە $\frac{O}{A} = \frac{\frac{O}{H}}{\frac{A}{H}}$ ، لەمەوەش دەبینین کە:

$$tan(\theta) = \frac{sin(\theta)}{cos(\theta)}.$$



نەخشـــە سێگۆشـــەییەکان وێنەکانیـــان شـــێوە شـــەپۆڵە، ئەمەش گرنگـــی هەیە لە بـــواری فیزیـــا. ســـاین لە بنەڕەتـــدا بە واتـــای کەوانە دێـــت، وە کۆســـاین هەر لە ســـاینەوە ســـەرچاوەی گرتـــووە co-sine واتە: تەواوکەری ســـاین (complement of sine).

سێگۆشەسازی

Triangulation

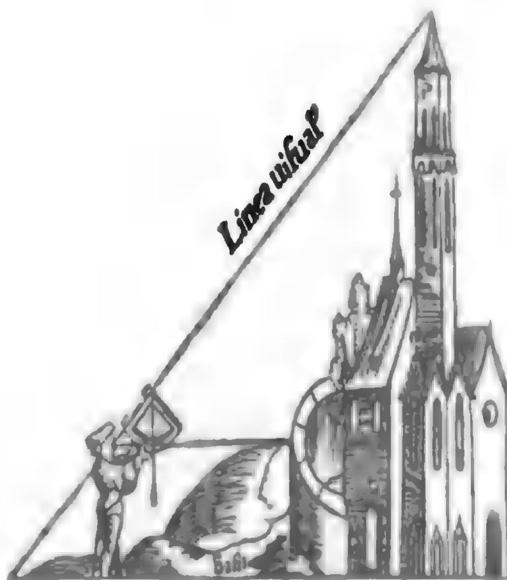
سێگۆشەسازی، یەکێکە لەو میتۆدانەی کە بەکاردێت بۆ دۆزینەوەی هەموو پێکهاتەکانی سێگۆشەیەکی گۆشە وەستاو، بەهۆی تەنیا دوو دراو، ئەویش درێژی یەکێک لە لایەکان و گۆشەیەک. دواتر لە رێگەی ئەم دوو دراوە، تەواوی دراوەکانی تر دەدۆزینەوە بە بەکارهێنانی نەخشە سێگۆشەییەکانی ساین، کۆساین و تانجێت.

وادانێ شازادەیەک دەیەوێت بەرزی نێوان پەنجەرەی ژووری خەوتنی شاژنەکەی و زەوی بزانێت، بۆ ئەمەش، پێویستە قژی کچەکە چەند درێژ بێت بۆ ئەوەی بگاتە سەر زەوییەکە؟ شازادە لە دووری l وەستاوە لە کۆشکەکە، کە گۆشەی نێوان بنکەی کۆشکەکە و پەنجەرەکە بریتییە لە θ.

وا دانێ کە کۆشکەکە بە شێوەیەکی ستونی رێک دروستکراوە، وە شازادە دووری نێوان خۆی و کۆشکەکە دەزانێت، کە بە کەرەستەیەک- ئامێرێک (Protactor) گۆشەکەشی دۆزیوەتەوە. شازادە دەیەوێت بزانێت پەنجەرەی کچەکە چەند لە زەوییەوە بەرزە، بۆیە بە بەکارهێنانی ئەو دوو دراوە، یەکەم: دووری شازادە لە کۆشکەکە. دووەم: گۆشەی نێوان شوێنی شازادە بە گوێرەی پەنجەرەکە. بەهۆی ئەم دوو دراوە و

بەکارهێنانی یاسای tan، دەتوانین بەرزی پەنجەرەی کەچەکە بدۆزینەوە کە بەرزییەکە بریتییە لە d بەم شێوە:

$$tan(\theta) = \frac{d}{l} \text{ ، وە } d = l \times tan(\theta)$$



$$d = l \times tan(\theta)$$

دروستکردنی ئەو ئامێرە یان ئەو گۆشە پێوە زۆر سەخت نییە، بەهۆی چەند شتێکی سادەوە دەتوانی دروستی بکەی.

هاوئەنجامە سێگۆشەییەکان

Trigonometric identities

هاوئەنجامە سێگۆشەییەکان، بریتین لەو هاوکێشانەی کە نەخشە سێگۆشەییەکانی وەک: ساین، کۆسان و تانی لە خۆگرتووە، ئەم هاوکێشانە بە راستی دەمێنەوە هەرچەند گۆڕانکاری لە بەهای گۆڕاوەکانیدا θ بکرێت. گریمان سێگۆشەیەکی گۆشە وەستاومان هەیە، تەنیشتەکەی دەکاتە A، بەرامبەرەکەی دەکاتە O و ژێیەکەشی بریتییە لە H، ئەوە بە پێی بیردۆزی فیساگۆرس:

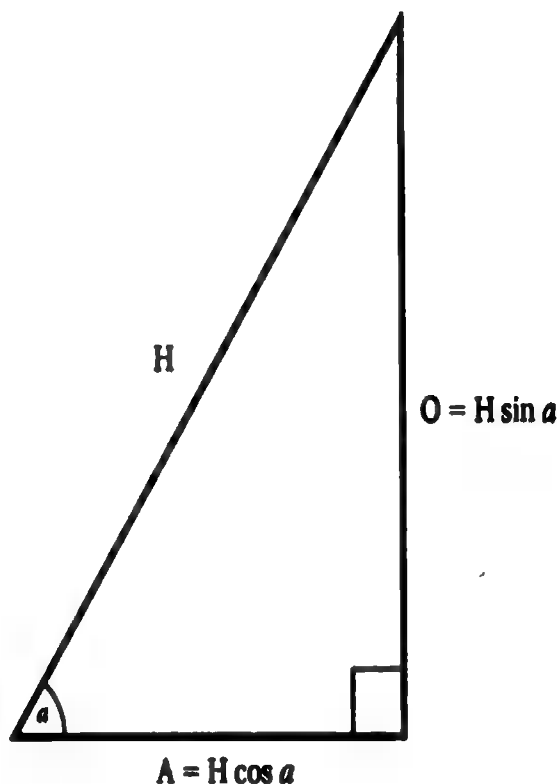
$$O^2 + A^2 = H^2$$

پاشان ئەگەر بێت هەردوو لای ئەم هاوکێشەیە دابەشی H^2 بکەین، ئەوە دەبینین کە:

$$\frac{O^2}{H^2} + \frac{A^2}{H^2} = 1 \ OR \ \left(\frac{O}{H}\right)^2 + \left(\frac{A}{H}\right)^2 = 1$$

لەبەر ئەوەی کە $sin(\theta) = \frac{O}{H} \ \& \ cos\,(\theta) = \frac{A}{H}$ ، ئەوە بە لە جێی دانانەوەی ئەمانە دەگەین: $sin^2\theta + cos^2\theta = 1$ ئەمە بۆ هەموو گۆشەیەک θ راستە. دیاریشە ئەمە کە شتێکی بە سوودە، کە

پەیوەنـــــدییەکی بە هێـــزە لە نێـــوان یاســـــای فیســـــاگۆرس و نەخشـــــە سێگۆشـــەییەکان، هەڵـبەتە بە بـێ یاسـای فیسـاگۆرس ئەمە بـوونی نەدەبـوو. گەر تێبینـــی بکەیـــن، لە یاســـاکە هەر یەک لە ســـاین و کۆســـاین دووجـــان، ئەمەش واتە ئێمە قسە لەسەر شتێکی دەکەین کە چوارگۆشەیە!



ڕێساکانی ساین و کۆساین

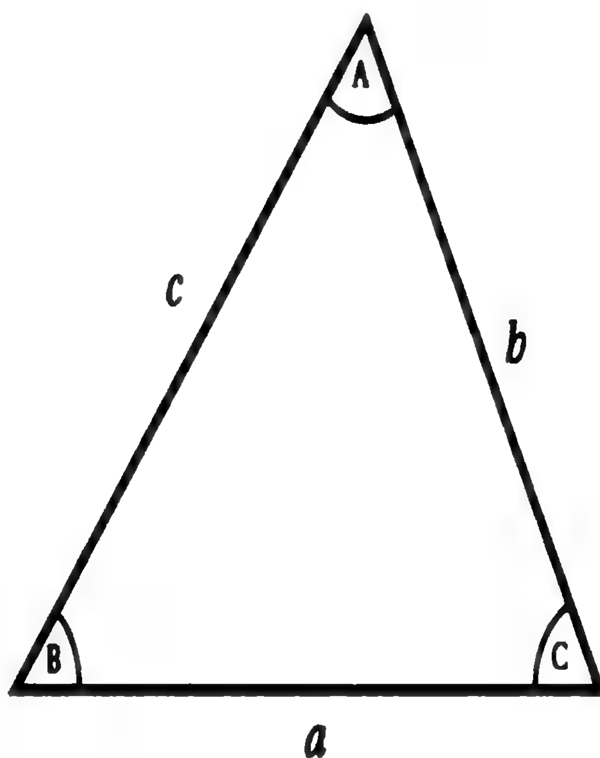
Sine and cosine rules

ئێمە تا ئێستا تەنیا باسمان لە یاساکانی ساین و کۆساین کردووە بۆ سێگۆشەیەک کە گۆشەیەکی پلە 90 هەیە، واتە سێگۆشەی گۆشە وەستاو. بەڵام ڕەنگە یەکێک لەو ئێوە بپرسێت: چی ئەگەر سێگۆشەکەمان سێگۆشەیەکی گۆشە وەستاو نەبوو؟ واتە گۆشەی پلە 90 نەبوو؟ لە ڕاستیدا یاسا بۆ ئەویش هەیە، بۆ دۆزینەوەی هەر یەکێک لە درێژ و گۆشەکانی، ئەگەر مەبەستمان بێت. بۆ سێگۆشەیەک کە لە خوارەوەش وێنەکەی دراوە، ئەمە یاساکەیەتی:

ئەمە یاسای ساین :
$$\frac{sin(A)}{a} = \frac{sin(B)}{b} = \frac{sin(C)}{c}$$

؛ یاسای کۆساین
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(C)$$

ئەگەر ■ نرخی 90 بێت، ئەوە $cos(90) = 0$ ، دیارە ئەگەر ئەمەش ڕوویدات لە یاسای کۆساینەوە دەگەینەوە بە یاسای فیساگۆرس!


A
B
C
a
b
c

ڕیسای گۆشەی دووهێندە

Double angle formulae

ڕیسـای (فۆرمـولەی) گۆشـەی دووهێـندە، بـریتییە لەو ڕیسـایەی کە ڕێگامـان دەدات گۆشـەیەک بکەیـن بە دوو بەشـەوە، کە بە جیـا ئـیش لەسـەر هەر گۆشـەیەکیان بکەیـن بە بەکارهێنـانی نەخشـە سێگۆشـەییەکانی سـاین و کۆسـان. یەکێـک لە سـوودەکانی ئەو ڕێسـایە ئەوەیە، هەر بەشـە گۆشـەک لە نێـوان 0 و 90 پـلە دایە. ئەو ڕێسـایە سـەرچاوەی پەیـدابوونی بەهـۆی ئەوەی کاتێـک لە نـاو سێگۆشـەیەک بە شـێوەیەک؛ ڕاسـتەهێڵێک لە یەکێـک لە گۆشـەکانەوە دەکـێش بـۆ لایەکـی بەرامـبەری گۆشـەکە، کە ئەو ڕاسـتەهێڵە گۆشەکە لەت دەکات. ڕێساکانیش بەو شێوەن:

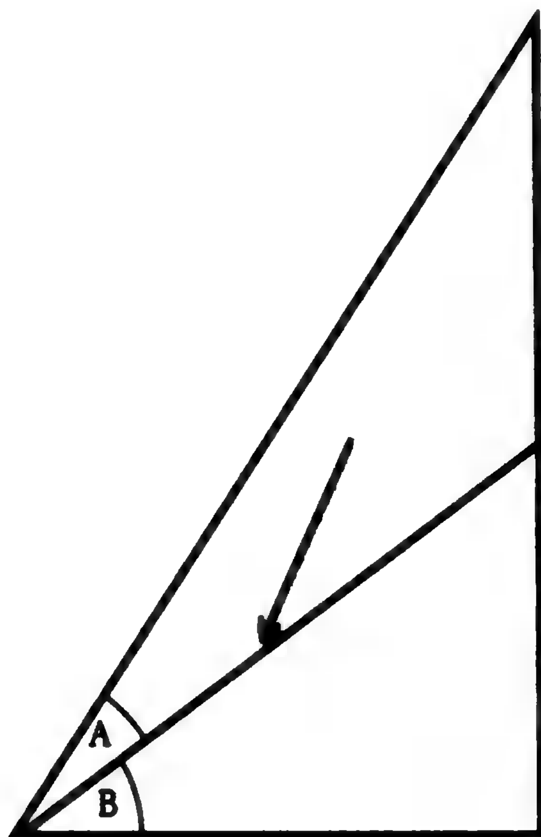
$$sin(A+B) = sin(A)\,cos(B) + sin(B)\,cos(A)$$

$$cos(A+B) = cos(A)\,cos(B) + sin(A)\,sin(B)$$

ئەگەر A و B هەردووکیان بەیەکسان دانێین، ئەوە:

$$sin(2A) = 2\,sin(A)\,cos(A)$$

$$cos(2A) = cos^2 A - sin^2 A = 1 - 2\,sin^2 A = 2\,cos^2 A - 1$$



ڕاستەهێڵەکە، گۆشەکەی لەت کردییە بۆ دوو گۆشە A و B.

ناساندنی هاوجێی-هاوچه‌شنی

Introducing symmetry

زۆر که‌س وا بیرده‌کاته‌وه‌ که‌ هه‌ندێک وێنه‌ هه‌ن، چ ده‌ستکرد چ له‌ سروشت، چ په‌یوه‌ندییه‌کی به‌ بیرکارییه‌وه‌ هه‌یه‌، یان وه‌ک هه‌ندێ جۆری باڵنده‌. له‌ بیرکاری بابه‌تێک هه‌یه‌ پێی ده‌وترێت "هاوجێی-هاوچه‌شن یان هاوشان"، که‌ هه‌ر شتێک یا وێنه‌یه‌ک پێی ده‌وترێن هاوچه‌شنه‌ ئه‌گه‌ر هاتوو شته‌که‌ یان وێنه‌که‌ جه‌وهه‌ره‌که‌ی هه‌ر وه‌ک خۆی بمێنێته‌وه‌ کاتێ جێگۆرکێی پێ ده‌که‌ین. له‌ ئه‌ندازه‌ زانیدا، جێگۆرکێی، به‌کاردێت بۆ پێناسه‌کردنی هاوچه‌شنی به‌هۆی "گۆڕینی جێگا یان ئاراسته‌" به‌ پاراستنی درێژی یه‌که‌کانی شته‌که‌، که‌ ئه‌م جێگۆرکێیه‌ش وێنه‌دانه‌وه‌یه‌. ته‌وه‌ره‌ی وێنه‌دانه‌وه‌ (Line of refecltion) له‌ ئاهووته‌ی (Space) دوو ڕه‌هه‌ندیدا، بریتییه‌ له‌ ڕاسته‌هێڵێک، وه‌یان ڕووته‌خت له‌ ئاهووته‌ی سێ ڕه‌هه‌ندیدا، یان خولانه‌دنه‌وه‌ (Rotation) به‌ ده‌وری ته‌وه‌ره‌کان، یان به‌هۆی وه‌رگێران-کشانه‌وه‌ (Translation). ئه‌گه‌ر جێگۆرکێی به‌سه‌ر شتێک یان شێوه‌یه‌ک بێنین، کاتێک شته‌که‌ جه‌وهه‌ری خۆی له‌ده‌ست نه‌دات له‌ جێگۆرکێیه‌که‌، ئه‌وه‌ به‌و شته‌ یان به‌ شێوه‌که‌ ده‌وترێت جێگیر-نه‌گۆڕ له‌ ژێرکرداری جێگۆرکێیه‌که‌ (Invariant under the transformation). هاوچه‌شنی له‌ پانتایی ماتماتیک سوودی زۆره‌، کاتێک هه‌ر شتێک له‌ ژێر کردارێک ده‌کرێت به‌ هاوچه‌شن سه‌یری بکه‌ین، ئه‌گه‌ر ئه‌و شته‌ له‌ ژێرکرداره‌که‌، تایبه‌تمه‌ندییه‌ ڕه‌سه‌نه‌که‌ی خۆی

بپارێزێـــت. ئەمەش زارشـــتێکی گـــرنگە کە بەکاردێـــت لە پێناســـەکردنی گرووپەکـــان و کردارەکـــان، یـــان چارەســـەرکردنی هەنـــدێک لە کێشـــە بیرکارییەکان.



راستەهێڵەکە، تەوەرەی وێنەدانەوەیە بۆ شێوەکە.

Translation، rotation، and reflection

کشانەوە، خولاندنەوە و وێنەدانەوە

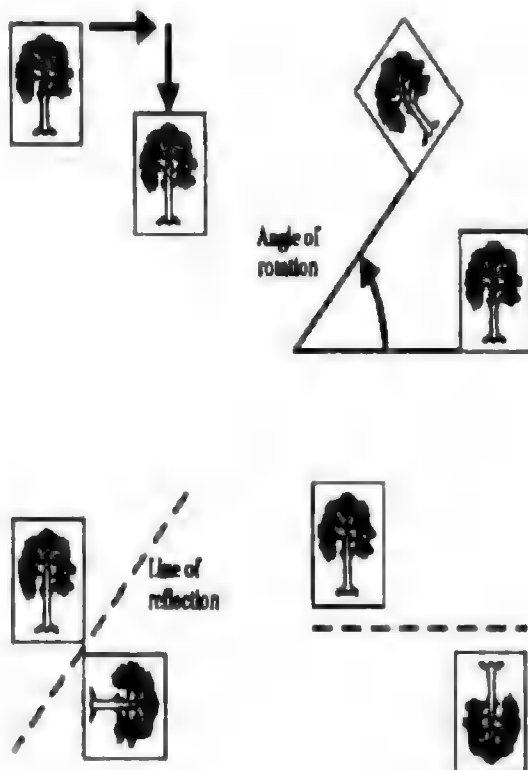
لە ئەندازەزانیـــدا، ســـێ جـــۆر لە هاوچەشـــنیمان هەیە، ئەمـــانە چەنـــد ڕێگـــایەکن بـــۆ جێگـــۆڕکێی شـــتێک بەبـــێ ئەوەی هـــیچ گۆڕنکـــارییەک لە جەوهەری شتەکە ڕووبدات.

کشـــانەوە (Translation): بـــریتییە لەو کـــردارەی کە تێـــدا شـــتێک یـــان وێـــنەیەک دەکشـــێت-دەخزێـــت بـــۆ ئاراســـتەیەکی تـــر، بەبـــێ ئەوەی گۆڕانکـــاری لە گۆشە و درێژی و پانی شتەکە ڕووووبدات، بە شێوەیی هێڵی.

خولانـــدنەوە (Rotation): بـــریتییە لەو کـــردارەی کە تێـــدا شـــتێک دەخـــولێنینەوە بە دەوری چەنـــد خاڵێـــک (یـــان خاڵێـــک)ی نەگـــۆڕ-جێگیـــر لە ئـــاهووتەدا-بۆشـــایی، دووبـــارە لەمەش هـــیچ شـــتێک گۆڕانکـــاری بەســـەر نـــایەت لە جەوهەری شـــــتەکە، بەڵکـــــو تەنیـــــا لە ڕووکەش دەگۆڕێـــــت نەوەک لە ناوەڕۆک.

لە پۆتـــــانی دووڕەهەندیـــــدا، وێـــــنەدانەوە (Reflection): بـــــریتییە لە دووبـــــارە کـــــردنەوەی یـــــان بینیـــــنەوەی وێـــــنەیەک یـــــان شـــــتێک بە دەوری تەوەرەی وێـــنەدانەوەکە. وەک چـــۆن ئـــێمە خۆمـــان لە ئـــاوێنەدا دەبینـــین. وێـــنەدانەوەش، بە دەوری تەوەرەیەک دەبێـــت لە ئـــاهووتەی دوو ڕەهەنـــدی، لە ئـــاهووتەی ســـێ ڕەهەنـــدی، ڕووتەخـــت ڕۆڵـــی وێـــنەدانەوەکە دەبینێـــت. وەک: بـــاڵێکی پەپـــولە، وێـــنەدانەوەی بـــاڵەکەی تریەتـــی، وە ئەگەر خەتێـــک بە

ناوەراستی پەپولەکە بکێشین، ئەوە ئەو راستەهێڵە دەبێتە راستەهێڵی وێنەدانەوەی نێوان هەردوو باڵی پەپولەکە. لە هەموو ئەو پرۆسانەدا، هیچ شتێک لە درێژی و پانی و یان گۆشەی شتەکان ناگۆرێت.



چەند ڕووەکان

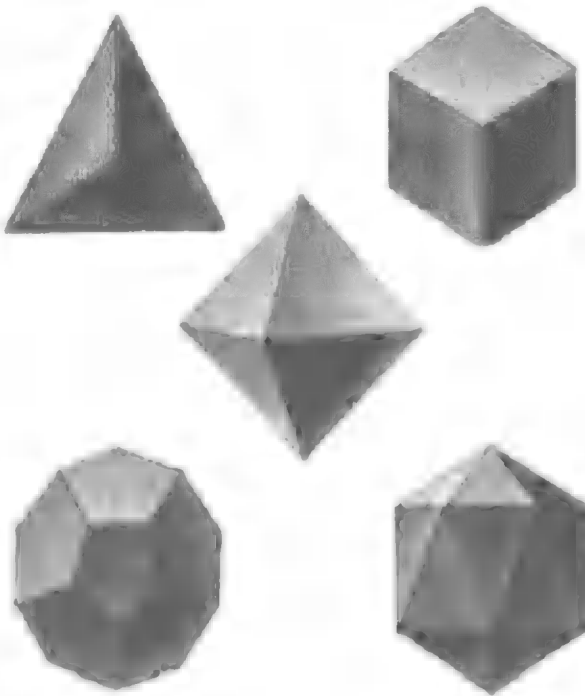
Polyhedra

ئـــێمە لە ئـــاهووتەی دوو ڕەهەنـــدی، چەنـــد لایەکانمـــان هەبـــوو. لە ئـاهووتەی ســـێ ڕەهەنـــدی، چەنـــد ڕووەکانمـــان هەیە. لە ئـــاهووتەی ســـێ ڕەهەنـــدی ئـــێمە ســـێ چەمکمـــان هەیە: درێـــژی، پـــانی و بەرزی. بـــۆ ئەو شـــێوانەی دوو ڕەهەنـــدین، ڕووبەرمـــان (Area) هەیە. بـــۆ ئەو شـــێوە و شـــتانەی ســـێ ڕەهەنـــدین، قەبارەمـــان (Volume) هەیە کە دەوردراوە بە ڕووتەختەکـــان و چەماوەکـــان. وەک چـــۆن چەنـــدلای ڕێکمـــان هەیە، بەهەمـــان شـــێوە چەنـــد ڕووەکـــان؛ شـــێوەی ڕێـــک و ناڕێکیـــان هەیە. بـــۆیە خێزانێـــک لە چەنـــــد ڕووی ڕێکمـــــان هەنە، کە ناســـــراون بە نـــــاوپرە ئەفلاتونییەکـــــان (Platonic solids). چەنـــد ڕووەکـــان تەنێکـــی ســـێ ڕەهەنـــدین، کە لە چـــوار ڕوو یان زیاتر پێکدێت، کە تێدا تەنیا لایەکان یەکتر دەبڕن.

- چـــــوار ڕوو (Tetrahedron): چـــــوار ڕووی هەیە، هەر ڕووەک سێگۆشەیەکی سێ لایەکسانە.
- شـــــەش پـــــاڵوو (Cube): شـــــەش ڕووی هەیە، هەر ڕووەکی چوارلایەکی ڕێکە.
- هەشـــــت ڕوو (Octahedron): هەشـــــت ڕووی هەیە، هەر ڕووەکی بریتییە لە 5 لای ڕێک (Pentagon).
- دوانـــــزە ڕوو (Dodecahedron): دوانـــــزە ڕووی هەیە، هەر ڕووەکی بریتییە لە سێگۆشەی سێ لا یەکسان.

• بیســــت ڕوو (Icosahedron): بیســــت ڕووی هەیە، هەر ڕووەکی بریتییە لە سێگۆشەی سێ لا یەکسان.

بە دڵنیـایی، زۆر جـۆر و شـێوەی تـری چەنـد ڕوومـان هەیە، بەجۆرێـک زیاتر لە ژمارەی چەند لایەکان.



ڕیزبەندی-کاشییە بەندکردن

Tessellations

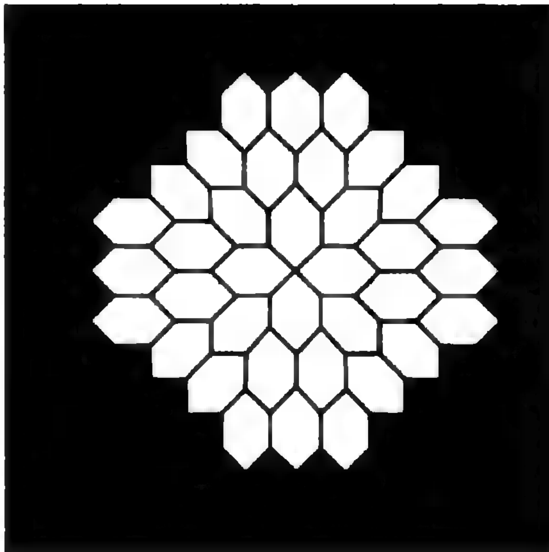
شێوە دوو ڕەهەندییەکان، پێیان دەوترێن ڕیزبەندی-کاشی بەندکردن (Tessellate) ئەگەر هاتوو توانرا ئەو شێوانە پێکەوە بلکێندرێن بە شێوەی لابەلا بێ ئەوەی هیچ بۆشاییەک لەم پیانووسانە[65] دروست بێت لە کاتی ڕووپۆشکردنی ناوچەکە یان ناوچەیەک. لەم ڕیزبەندی کردنە، یەک شێوە بەکاردێت، نموونە بەس چوار لا بەکاردێنین یان هەر شێوەیەکی تر. یەکێک لە شێوەکان کە دەتواندرێت پێکەوەبلکێندرێن بەو شێوەی وتمان، بریتییە لە چەند لایە ڕێکەکان، وەک: چوار لا و شەش لا، کە دەتواندرێت کاشییە بەندبکرێت، وەک لە وێنەکەشدا دیارە.

ڕیزبەندی ئالۆزتر و وردتر، دەکرێت دروستبکرێت بەهۆی پێکەوە گرێدانی چەند شێوەیەکی لێک جیاواز. سادەترینیان، زانراوە بە چاندنی دەوری (Periodic Tilings)، کە شێوەیەکی هاوچەشنە بەهۆی کشانەوە-وەرگێڕان. ئەوەش واتای ئەوەیە: لەو ڕیزبەندکردنە کلێشە-شێواز هەیە، ئەو کلێشانەش (Pattern) دەتواندرێت بەجۆری جیاواز ئاراستەبکرێت.

---

[65] پیانووسان: لکاندنی شتێک بە شتێکدا.

لە جـــۆرە جیاوازەکـــانی چەنـــد ڕووەکـــان، واتە شـــێوە ســـێ ڕەهەنـــدییەکان، تەنیـــا شـــەش پـــاڵو ئەو توانـــایەی هەیە کە بەکاربهێنـــدرێت بـــۆ ڕیزبەنـــدی کـــردن لە ئـــاهووتەی ســـێ ڕەهەندیـــدا بە ڕەچـــاوکردنی ئەو مەرجـــانەی باســـمانکرد، بەڵام ئەگەر بێـــت و ڕۆبچیـــنە چەنـــد ڕووە زۆر ئاڵۆزەکـــان، ئەوە ئەســـتەم نییە ئەو کـــارە بکرێـــت، وە دەکرێـــت بگەیـــنە ناکۆتـــا ڕیزبەنـــد-کاشـــییە بەنکـــردن کە پێـــی دەوترێـــت: شـــامەنگ (honeycombs). ئەمەش گـــرنگە لە (crystal chemistry)، کاتێـــک ســـەرەکانی چەنـــد ڕووەکە ئامـــاژەن بـــۆ شـــوێنی ئەتۆمەکـــان لە کریســـتاڵەکە. شـــیکردنەوەی شـــامەنگەکان دەریـــدەخات کە 230 ڕیزبەنـــدی ســـەربەخۆ، دەوری مەودای شیاوی پێکهاتەکانی کریستاڵەکان دەدەن.



لکاندنی پنرۆز

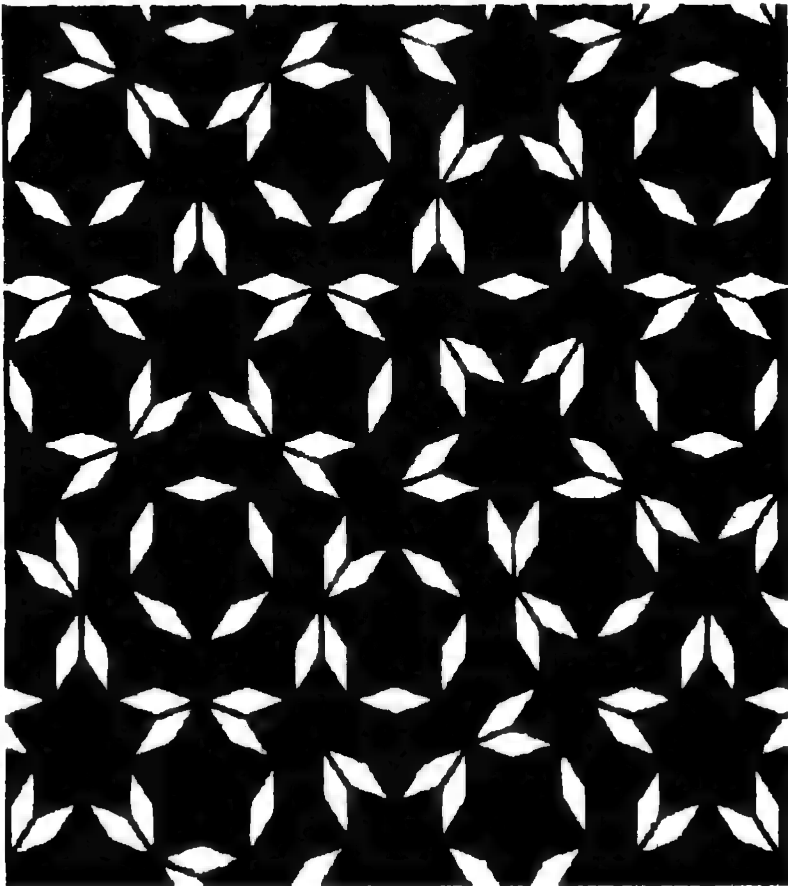
Penrose

لکاندنی پنرۆز[66] بریتییە لە پۆلێکی تایبەت لە لکاندنی دوو جۆر شێوەی سەرەتایی لێکجیاواز. ئەم لکاندنە لە دەوروبەری سالی 1870 لە لایەن فیزیازانی تیۆری "رۆگەر پنرۆز" داهێنرا. لەم لکاندنەدا، کلێشە دووبارە نابێتەوە بە شێوەی خول. ئەوەی جێگای ئاماژە پێکردنە، ئەم شتە رووتە (پەتییە) سەلێمندراوە کە چەند بەکارهێنانێکی سروشتی هەیە. لە سەرەتاکانی 1980، زانستخوازە مەتریالەکان، پێکهاتەیەکی خولییان داهێنا کە پێی دەوترێت: نیمچە کریستال (Quasicrystal) لەگەل تەفسیرێکی بیرکارییانە. ئەمانەش دەتوانرێت بەکاربهێندرێت وەک رووپۆشێکی پتەو بۆ مادەکان، کە بەرکەوتنی زۆر لاوازی هەیە.

سادەترین پنرۆز کە دروستکراوە لە بەکارهێنانی لەپزینەیی قەبە و لەپزینەیی لاواز ("fat" rhombus and a "thin"rhombus) وەک شێوەی سەرەکی، وەک لە وێنەی خوارەوە نیشاندراوە. لەپزینە، بریتییە لە شێوەیەک کە چواری لای یەکسانی هەیە، بەجۆرێک کە هەر جووتێکی

[66] سیر رۆجە پینرۆز (8ی ئابی 1931) فیزیکزان، بیرکاریزان و فەیلەسوفێکی بە رەچەلەک ئینگلیزە. پرۆفیسۆرە بە هەلگری ناونیشانی روز بێلە لە پەیمانگای بیرکاری لە زانکۆی ئۆکسفۆرد. پینرۆز ناسراوە بە ئیشەکانی لە دنیای فیزیای بیرکاریانەدا، بە تایبەتی کارەکانی لە بواری تیۆری گویزەیی گشتی و کۆزمۆلۆجیدا. چەندین خەلاتی وەرگرتوە لەوانە: خەلاتی ۆلفی سالی 1988 لە فیزیا، هاوکات لەگەل ستیڤن هۆکینگ پێکەوە لەسەر تێگەشتنیان لە گەردوون.

لایە بەرامبەرەکـــان تەریـــبن. شـــتێک کە لەم بـــارییەوە نەزانـــراوە، ئەوەیە: دەکرێـــت شـــێوەیەک (تەنیـــا یەک شـــێوە) بـــدۆزرێتەوە کە بتوانـــدرێت پێکەوەبنـــدرێت بـــۆ دروســـتکردنی شـــتێکی لەم شـــێوە بەهەمـــان ئەو تایبەتمەندییەی ئێستا؟



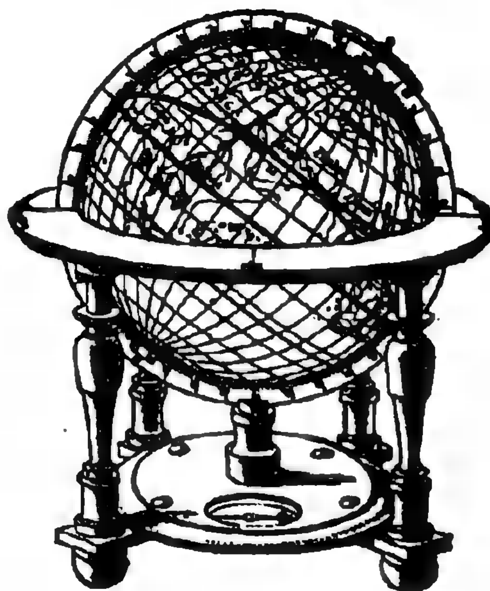
گۆ

Sphere

گــۆ، بــریتییە لە شــێوەیەکی ســێ ڕەهەنــدی کە هاوتــای بــازنەیە لە ئــاهووتەی دوو ڕەهەنــدی، کە بە تەواوی شــتێکی خــڕی نــاو پــتەوی ئەنــدازەییە. ڕووی گــۆ بیرکارییــانە پێناســەکراوە وەکــوو کــۆمەڵە خاڵێــک کە هەموویــــان هەمــــان دووریــــان r هەیە لە خــــاڵێکی دیــــاریکراو، بەلام لە ئــاهووتەی ســێ ڕەهەندیــدا. ئەم دووریــیە r بــریتییە لە نیــوەتیرەی گــۆیەکە، وە خــاڵە دیــاریکراوەکە، بــریتییە لە چەقــی (ناوەڕاســت) گــۆیەکە. بە درێژتــرین ڕاســتەهێڵی نــاو گــۆیەکە، کە دوو خــاڵی بەرامــبەر یەکــی گــۆیەکە بەیەکەوە دەبەســتێتەوە و بە چەقــی گــۆیەکەش تێپەڕدەبێــت و درێژییەکەشــی دوو ئەوەنــدەی نیــوەتیرەی گــۆیەکەیە، دەوترێــت تیــرەی گــۆیەکە. ئەگەر گــۆیەکە، ڕاگیرکەرێکــی هەبێــت لە دەوری چێــوەکەی، بــۆ نمــوونە هێڵــی جەمســەری زەوی، ئەوە هەر شــوێنێک لەســەر ڕووەکەی دەتوانــدرێت وەســفکرێت و دیاربکرێــت بەهــۆی دوو گۆشــەوە. لە زەویــدا، ئەو هــێڵانە وەک هێڵــی پــانی و هێڵــی درێــژی ناســراون. هێڵــی پــانی (Latitude) بــرتییە لە گۆشــەی نێــوان ئەو هــێڵەی کە بەســتراوەتەوە بە شــوێنەکە بــۆ چەقــی گــۆیەکە، کە وەک تیشــکێکە، وەک تەوەرەی ســەرەکی. هێڵــی درێــژی (Longitude) بــرتییە لەو گۆشــەی دەوری تەوەرەکە، لە نێــوان تیشــکی هێڵــی پــانی و هێڵێــک لە خــاڵێکی پێناســەکراوی ئاشــکرادا، وەک هێڵــی ســەرەتایی درێــژی زەوی (Prime Meridian). ڕووبەری گشــتی گــۆ، بەهــۆی ئەو فۆرمــولەیەوە کە

دەکاتە: $4\pi r^2$ هەژماردەکرێت. ڕووبەری گۆ دەکاتە: 4π کاتێک نیوەتیرەی گۆیەکە 1 بێت. بەهۆی هێڵەکانی درێژی، کاتی سەر زەویمان پێ دیاری ئەکرێت و هێڵەکانی پانیش توانای نیشاندانی گەرمیان هەیە لەسەر زەوی، چونکە هێڵی کەمەرەیی زۆرترین تیشکی خۆری بەردەکەوێت.

ئەگەر بەهۆی ڕووتەختێکەوە، گۆیەک بکەینە دوو بەش-دوو نیوە گۆ (Hemisphere) و کاتێک ڕووتەختەکە بە چەقی گۆیەکە دابڕوات، ئەو ڕووتەختەکە لە بازنەیەک گۆیەکە دەبڕێت کە پێی دەوترێت بازنە مەزنە (Great circle).

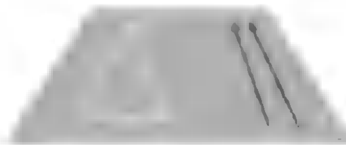


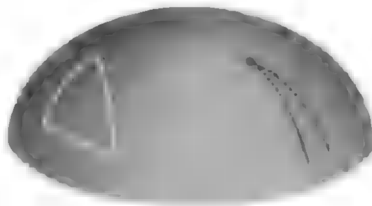
ئەندازەی نا-ئیقلیدی و نا-کلاسیکی

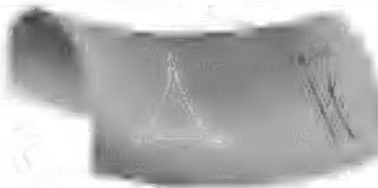
Non-Euclidean and non-classical geometries

تەواوی ئەو ئەنـدازانەی کە ئیقلیـدی نـین، پێـان دەوترێـت ئەنـدازە نـا-ئیقلیـدییەکان. ئەنـدازە نـا-ئیقلیـدییەکانیش جیـاوازن لە ئەنـدازەی ئیقلیـدی. سـەرجەم ئەو ئەنـدازەیەی لە قوتابخـانە دەیـاخوێنین، هەموویـان ئەنـدازەی ئیقلیـدین. پەیـدابوونی ئەنـدازەکانی تـر دەگەڕێـتەوە بـۆ پێشـکەوتن لە زانسـتەکانی تـر، واتە ئەنـدازەی ئیقلیـدی تەنیـا لە ئـاهووتەی دوو ڕەهەنـدی کـاری پـێ دەکـرا، ئەم ئەنـدازەیەش خـۆی لە ■ بەڵگەنەویسـت دەبینیـتەوە کە پێشـتر باسـمان کـرد. یەکێک لە ئەنـدازە نـا-ئیقلیـدییەکان بـریتییە لە ئەنـدازەی گـۆ (Spherical geometry). لە ئەنـدازەی ئیقلیـدی وتمـان "هێـڵ" شـتێکی ڕاسـتە، بەڵام لە ئەنـدازەی گـۆ هێـڵ بـریتییە لە بـازنە! کە بـازنەکەش بە قەد چێـوەی گـۆیەکە دەبێـت، واتە بـازنە مەزنە (Great circle). لە ئەنـدازەی ئیقلیـدی وتمـان ئەگەر لە دەرەوەی ڕاسـتەهێڵێک؛ خاڵێکمـان هەبێـت، ئەوە ڕاسـتەهێڵێکی تـر هەیە بەو خـاڵەدا دەڕوات و تەریـب دەبێـت بە ڕاسـتەهێڵەکەی تـر، بەڵام لە ئەنـدازەی گـۆ، ئەگەر لە خاڵێـک لە دەرەوەی ڕاسـتەهێڵێک (لە ئەنـدازەی گـۆ) هەبێـت، ئەوە هەر ڕاسـتەهێڵێکی تـر بەو خـاڵە دا بـڕوات، بـێ یەک و دوو ڕاسـتەهێڵەکەی تـر دەبڕێـت! واتە لە ئەنـدازەی گـۆ هـیچ دوو ڕاسـتەهێڵێک پـێکەوە تەریـب نـابن لە کاتێـک ڕاسـتەهێڵ لەو ئەنـدازەیە بـرتییە لە بـازنە مەزنە. ئەنـدازەی ئیقلیـدی دەکرێـت دابەشـبکرێت بـۆ دوو بەش، ئەوانـیش ئەنـدازەی چەمـاوەی ئەرێنـی و ئەنـدازەی چەمـاوەی

نەریتی، کە ئەمانەش بە ئەندازەی نا-کلاسیکیش ناو دەبرێن. خاڵی هەرە جیاواز لەمانە، ئەوەیە: لە ئەندازەی ئیقلید کۆی گۆشەکانی ناوەوەی سێگۆشەیەک بە تەواوی دەکارتە 180، بەڵام لە ئەندازەی نا-کلاسکی بەو شێوەی نییە، وەک لە ئەندازەی گۆ، کۆی گۆشەکانی ناوەوەی سێگۆشە زیاترە لە 180 پلە! وە لە ئەندازەی بڕگەی زیاد (Hyperbolic) کەمترە لە 180 پلە.







ئەمانە بەکاردەهێندرێت بۆ تەفسیری ئەم گەردوونە، ئایا فراوانبوونی گەردوون، بە کام لەم مۆدێلانەیە؟ وە چەندین پرسی تر...

پرسی پێچانەوەی گۆیەکان

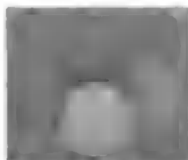
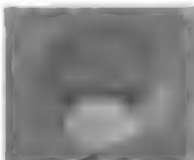
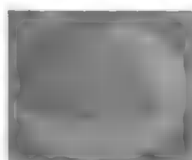
Sphere-packing problem

پرســـی -کێشـــەی پێچـــانەوەی گۆیەکـــان، یەکێـــک بـــوو لە کێشـــەکانی سـەدەکانی ڕابـردوو بـۆ سـەردەمی کیـپلەر، کە مێژووەکـی سـەرنج ڕاکـێش و دەوڵەمەنـدی هەیە. کێشـەکە دەربـارەی ڕێکخسـتن و دانـانی چەنـد گـۆیەکە، واتە ئەگەر چەنـد گۆیەکمـان هەبێـت، ئەوە پێویسـتە ئەو گۆیـانە چـۆن دابنـدرێت بـۆ ئەوەی کەمتـرین بۆشـایی دروسـت بێـت لەم کـارەدا، ئایـا چەنـد بۆشـایی داگیـر دەکەن؟ لەگەڵ ئەمەش، دیـارە ئەمە پەیوەنـدی بە دوکـانێکی میوەفرۆشـی هەبـووە، کە یەکێـک لە میوەکـانی بـریتییە لە پرتەقـاڵ، کە دەیەوێـت پرتەقاڵەکـان بـۆ جۆرێـک لە نـاو کـارتۆنەکە جـێ بکـاتەوە کە کەمتـرین بۆشـایی دروسـت بێـت. لەم پرسـە لە بـری پرتەپـاڵ، گولەتـۆپ بـۆ سـەرنج خسـتە سـەر ئەو کێشـەیە بەکارهـات. لە سـەدەی 17، گەردووناسـی ئەلمـانی "جۆهـانس کیـپلەر"[67] گریمـانەیەکی کـرد، لەم پرسـەش ڕێکخسـتنێکی سـادە ئەنجامـدرا بەهـۆی دانـانی گۆیەکـان بە شـێوەیەک چەنـد ڕیزێـک، کە ڕیزەکـانیش پـێکەوە شـێوەیەکی دووجـا (چـوارلای یەکسـان) دروسـت دەکەن، پاشـان دانـانی چینێکـی تـر لە ئەو شـێوانەی کە بۆشـاییەک دروسـت بـووە

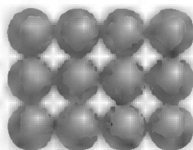
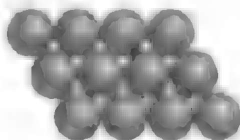
---

50 کیـپلەر، بیرکـاریزان و گەردوونـناس و ئەستێرەناسـی ئاڵمـانی بـوو. ڕۆڵێکـی سـەرەکی هەبـوو لە شۆڕشـی زانسـتیی سـەدەی 17هەمـدا. ناوبـانگی کیـپلەر دەگەڕێـتەوە بـۆ یاسـاکانی لەبارەی جووڵەی هەسارەکانەوە کە چەندین بەرهەمی هەبوون لە بوارە جیاجیاکان.

(وەک ڕیزکردنی هێلکە لەسەر یەکتری)، پرسیارەکە ئەوەیە: ئەو تۆپانە لە ناو پاکەتێک-کارتۆنێک چەند شوێن دەگرن؟ بۆ نموونە ئەگەر چوار تۆپی

بلیار بە شێوەیەکی چوارگۆشەیی پێکەوە بلکێنین، پاشان تۆپێکی تر بخەینەر سەر ئەو چوار تۆپە، ئەگەر ئێستا بێنین لە هەر تۆپێکی چینی خوارەوە، چارەگێکی لێ بهێڵینەوە، وە تۆپەکەی چینی سەرەوەش نیوەی بهێڵینەوە (وەک لە وێنەکانی سەرەوە)، ئەوە دەگەینە دەرئەنجامێک، ئەو ئەنجامە ئەوەیە تۆپێکی تەواو دەکات بە هەموویان. ئەوەی پێی دەگەین لەم میتۆدە، ئەوەیە کە پێچانەوەی کۆمەڵێک تۆپ 74% و شتێک زیاتر لەو بۆشاییەکە دەگرێت کە تۆپەکانی لە ناو دەپێچینەوە! ئەمەش بەهۆی زانینی یەکەکانی ئەو شتەی کە گۆیەکانی لە ناو دادەنێین. سەلماندنی ئەمەش بە هۆی یارمەتی کۆمپیوتەرەوە بووە کە لە ساڵی 2003 بەکۆتا گەیشت.

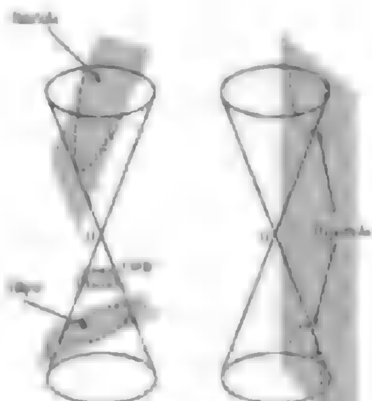
برگە قوچەکییەکان

Conic sections

بــڕگە قوچەکییەکــان دەگەڕێــتەوە بــۆ ســەردەمی گریکەکــان، هەر وەک ڕاســتەهێڵەکان و ڕووتەختەکــان. گریکەکــان بــڕگە قوچەکییەکانیــان بەو شــێوە پێناســە کــردووە: کاتێــک قــوچەکێکی دوانیمــان هەبێــت و ڕووتەختێکمــان هەبێــت، ئەوە بــڕگە قوچەکییەکــان لە ئەنجــامی بڕینــی قوچەکەکــان بەهــۆی ڕووتەختــێکەوە پەیــدا دەبــن، بەلام لە ئێســتا بــڕگە قوچەکییەکــان بە جەبریــانە پێناســەکراون و لێکۆڵینەوەیــان لەســەر دەکرێــت، یانیش لە ڕێگەی بەکارهێنانی یاسای دووری لە ڕووتەختی پۆتاندا.

بــڕگە قوچەکییەکــان، بــۆ تێگەیشــتنمان لە ڕێــڕەوی هەســارەکان یارمەتیمــان دەدەن، کە جوڵەیــان دیاریــدەکرێت بەهــۆی هێزێــک، کە ئەو هێــزە هــاوڕێژەیە لەگەڵ دووجــای دوورییەکەیــان. لە ئاســماندا، هەســارەکانی کــۆمەڵەی خــۆر بە دەوری خــۆردا دەخــولێنەوە لە چەنــدەها خــولگە کە شــێوەی بــڕگەی نــاتەواو-هێلکەیــی وەردەگــرن، وەک کە ڕۆژ ڕۆڵــی تیشــکۆ دەبینێــت. ئەو ڕووتەخــتە چــۆن و بە چ شــێوەیەک قــوچەکەکە دەبڕێــت، ئەوە چەنــد بــارێکی جیــاوازی لــێ دروســت دەبێــت، ئەوانــیش هەر یەکە و ســیفەت و شێوەیەکی تایبەتی هەیە، کە ئەمانەن:

- دروستبوونی بازنە (Circle): ئەگەر بێت رووتەختەکە بە شێوەیەکی ئاسۆیی قوچەکەکە ببڕێت.
- بڕگەی هاوتا (Parabola): کاتێک رووتەختەکە بە شێوەیەکی لار قوچەکەکە دەبڕێت وە تەریبە بە قوچەکەکە، بەو مەرجەی رووتەختەکە بە خاڵی O تێپەڕنەبێت.
- بڕگەی ناتەواو (Ellipse): کاتێک رووتەختەکە بە شێوەیەکی لار قوچەکەکە دەبڕێت، وە رووتەختەکە تەریب نەبێت بە قوچەکەکە و بە خاڵی O دا تێپەڕنەبێت.
- بڕگەی زیاد (Hyperbolic): بڕگەی زیاد لە بڕگەی ناتەواو دەچێت، کاتێک رووتەختەکە و گۆشەی رووتەختەکە کەمترە لە گۆشەی قوچەکەکە.



بارێکی شاز لە بڕگە قوچەکییەکان کە بریتییە لە تێپەڕبوونی رووتەختەکە بە خاڵیO ، ئەویش یان رووتەختەکە وەک خۆی دەمێنێتەوە و گۆڕانکاری دروست ناکات، یان راستەهێڵێک دروست دەبێت.

ڕووتەختی پۆتان (دیکارتی)

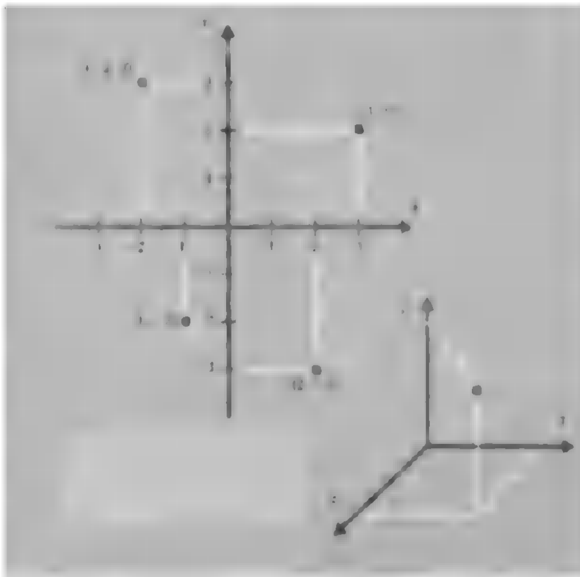
Cartesian coordinates

لە بیرکاریدا، ڕووتەختی پۆتان یان ڕووتەختەتی دیکارتیشی پێدەڵێن، بریتییە لە تەوەرەیەکی دوو ڕەهەندی یا سێ ڕەهەندی، کەتێدا وەسفی شوێنی خاڵێک دەکەین لە ئاهووتەدا-بۆشاییدا. لە ئاهووتەی دوو ڕەهەندی، خاڵ، لە جووتێک ژمارە پێک دێت. هەڵبەتە وەسفی ئەو خاڵە لە ڕووتەخت (Plane) بە هۆی چەقی ڕووتەختەکەیە، ئەویش خاڵ بنەرەتی پێی دەڵێن، کە دەکاتە: (0،0) . ئەم ڕووتەختە لە دۆزینەوەکانی فەیلەسوفی فەرەنسی دیکارتە[68] لە سەدەی 19 هەم. ڕووتەختی پۆتان دواتر لە نەخشەی جیهان و GPS بەکارهات و ئاسانکارییەکی زۆری بۆ مرۆڤایەتی کرد.

[68] ڕێنێ دیکارت (بە فەرەنسی ʁəne dekaʁt) (لەدایکبوون 1596- کۆچی دوایی 1650) فەیلەسووف، بیرکار و شارەزای فیزیک و نووسەری خەڵکی فەرەنسا بوو کە زیاتر تەمەنی لە وڵاتە یەکگرتووکانی نیزرلاند (هۆڵەندا) ڕابوارد. نازناوی (باوکی فەلسەفەی نوێی) پێدرا و زۆرینەی گەشەی فەلسەفەی ڕۆژئاوایی کە لە ڕۆژگاری ئەمڕۆشدا دەیبینین، درێژەی نووسراوەکان و بیروەرییەکانی ئەوە. بە تایبەت پەرتووکی (ڕامانگەلێک لە فەلسەفەی ئەولادا) ئێستاکەش وەک بەشی سەرەکی خوێندن لە زانکۆکانی فەلسەفە بەکاردێت. کاریگەریی دیکارت لەسەر بیرکاری بە ڕوونی دیارە؛ سیستەمی پۆتانەکانی دیکارت (Cartesian coordinate system) ڕێگە دەدات شێوە هەندەسییەکان لەسەر هاوکێشە جەبرییەکان بەیان بکرێن. دیکارت وەک باوکی ئەندازەی شیکارانە ناسراوە. هەروا دیکارت بە یەکێک لە ئەندامانی شۆڕشی زانستیی دەزانن. (ویکیپیدیا)

لە ڕووتەختی دوو ڕەهەندیدا، خاڵ بریتییە لە جووتە ڕێکخراوێک بە شێوەی (x,y)، ئەمەش واتای ئەوەیە x یەکە بجوڵێ بە شێوەی ئاسۆیی (ڕاست یان چەپ) و y یەکە بجوڵێ بە شێوەی ستوونی (سەرێ یان خوارێ) و لە کوێ بەیەک گەیشتن، ئەوە خاڵێک دەنووێنن لە ڕووتەختدا.

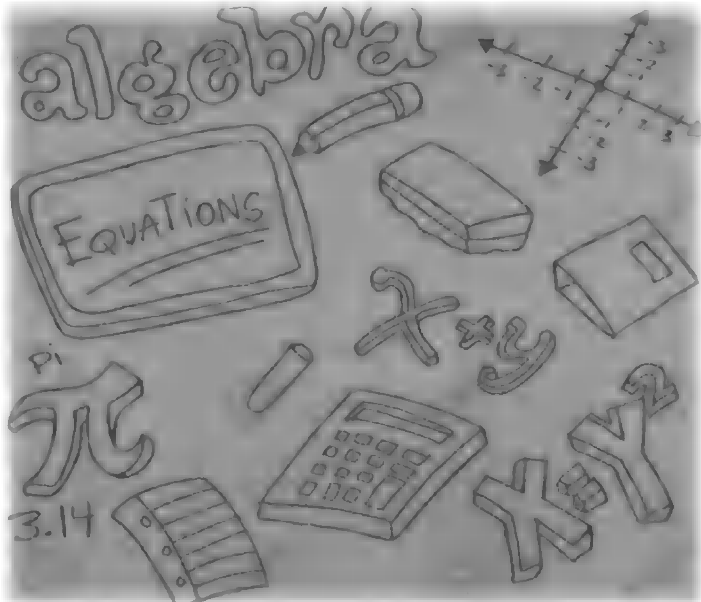
بەهەمان شێوە، لە ئاهووتەی سێ ڕەهەندی (x,y,z) ئەویش بەکاردێت بۆ نواندنی ئەو شتانەی سێ ڕەهەندیان هەیە، وەک گۆ. بیرکاریزانەکان هەر بەوە نەوەستان، بەڵکو توانیان ئاهووتەیەکی زیاتر لە 3 ڕەهەندی تەفسیر بکەن و بیردۆزەکان لە بارەیانەوە بخەنە ڕوو. واتە n ڕەهەندی، کە دەکرێت 4 یان 10 یان 15 بێت یان هەر ژمارەیەکی تەواوی ئەرێنی.



بەشی پێنجەم

جەبر

Algebra



جەبر

Algebra

جەبـــــر[69] لقێکـــــی ســـــەرەکییە لە بیرکاریـــــدا، بەڵام لەگەڵ ئەوەش سەردەکێشـــتە نـــاو زۆربەی لقەکـــانی تـــر، بـــۆیە دەتـــوانین بڵـــێن، ڕیشـــاڵی بەستنەوەی هەمـوو بیرکارییە. جەبـریش لە نـاو خۆیدا دەبێتە چەنـد بەشـێک، سـەرەکیترینیان بـریتییە لە جەبـری سـەرەتایی، دواتـر جەبـری پوخـت، وەک: تێـۆری گـرووپ و تێـۆری ئەڵـقە. لە جەبـری سـەرەتایی هونەرێـک هەیە، ئەویـش دەسـتکاری کردنـی زانـراو و نەزانراوەکـانە، کە دروسـتکردنی پەیوەنـدییەکە لە نێوانیـان، زانراوەکـان زۆر جـار دەگـۆڕین بـۆ نەزانراوێـک کە بە پیتێـک یـان هێمـایەک گوزارشـتیان لـێ دەکەن، زۆر جـار بەگشـتی بە x ئاماژەی بۆ دەکەین. واتە هێما جێگای ژمارەکان دەگرێتەوە!

نمـونە: مـن خـۆم 5 دانە پەرتـوکم هەبـوو، بـراکەم چەنـد پەرتـوکێکی تـری بـۆ هێنـام، کە کـۆی گشـتی پەرتوکەکـانم بـوو بە 15 پەرتـوک. ئەگەر بە وردی سـەیر بکەیـن "بـراکەم چەنـد دانە پەرتـوکێکی بـۆ هێنـام"، واتە جـارێ نـازانین چەنـد پەرتـوک بـووە، بـۆیە ئەو (چەنـد پەرتـوکە) کە ژمـارەکەی نـازانین بە x گوزارشـتی لـێ دەکەیـن، دواتـر دەڵێـت: کـۆی گشـتی

---

[69] جەبـر لە داهێنانەکـانی شارسـتانییەتی عەرەبە، لەسـەر دەسـتی خـوارزمی. بەهـۆی بـوونی پەیوەنـدی بازرگـانی لە نێـوان ئەوروپییەکـان و شارسـتانییەتی عەرەبـی، ئەو زانسـتە گـوێزرایەوە بـۆ ئەوروپـا، بـۆیە پیتەکـانی "ال" هەر لەگەڵ مـایەوە لە کـاتی وەرگێڕانـی، بـۆیە بووە بە Algebra

پەرتوکەکانم بووە بە 15، ئەمەش واتە: $x + 5 = 15$. ئەمە پێی دەوترێت هاوکێشەی جەبری. ئەوەش دیارە کە نرخی $x = 15 - 5$ واتە $x = 10$. جەبر بە شێوەکی گشتی دەست تێوەردانە لە نێوان ژمارە و هێماکان. لە بیرمان نەچێت، هاوکێشەی جەبری[70] ئەو هاوکێشەیە کە نەزانراوێکی تێدایە، وەک ئەمەی سەرەوە. دواتر پەیتا پەیتا شتەکان گەورەتر و بەرە و ئالۆزبوون دەچن هەر لە ژێر ناوی جەبر.

70 لە پاڵ هاوکێشەی جەبری، هاوکێشەی ناجەبریش هەیە، هاوکێشەی ناجەبری بەس ژمارەی تێدایە وەک: 20=3-23.

هاوکێشەکان

Equations

هاوکێشـــە، بـــڕتییە لە دەربڕینێکـــی بیرکاریـــانەیە کە تێـــدا دوو بـــڕ لە نرخـدا یەکسـان دەبـن بە یەکتـر. یەکێـک لە سـیما هەرە دیارەکـانی هاوکێشـە، ئەوەیە کە هێمـــای یەکســـانەی(=) تێـــدایە. بـــۆ نمـــوونە: 2+2=4 ئەمە هاوکێشـــەیەکە. وەک وتمـــان، دەکرێـــت هاوکێشـــەکان هێمـــا لەخـــۆبگرن. هاوکێشـە هەر تـایبەت نیـیە بە بیرکـاری، بەڵکـو بە زانسـتەکانی تـریش، وەک لە فیزیـــــــا، هاوکێشـــە بەناوبـــانگەکەی ئەنشـــتاین: $E = mc^2$. یـان هەر بـۆ تێگەشـتنێکی ئاسـانتر $x + 2 = 20$ ، ئەمـانە گشـتی هاوکێشـەن. لە جەبـردا ئەو هاوکێشـانەی هێمـایەک دەگـرنە خـۆی پێـان دەوتـرێن هاوکێشـە جەبرییەکـــان، هێماکـــانیش زۆر جـــار بە پیـــت یـــان ســـیمبولێک-هێمـــا دەردەبڕدرێت کە پێـان دەوترێـت: نەزنـراو، نمـونە: لەسـەرەوە x دەبینـین، یەکێـک حەزی لـێ بێـت بۆخـۆی پیتـی یەکەمـی نـاوەکەی دادەنێـت، یـان هەر هێمایەکی تر.

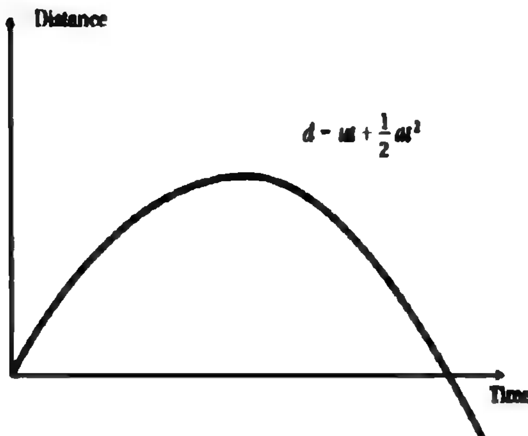
هەر لە جەبـر چەنـد تەکنیکێـک هەیە بـۆ دۆزینـەوەی ئەو نەزانـراوەی لە هاوکێشـــەکە هەیە، مەبەســـتمان ئەوەیە نرخـــی ئەو هێمـــایە چییـــە کە لە هاوکێشـەکەدا هەیە. وەک گـوترا هاوکێشـە هەر مـوڵکی بیرکـاری نیـیە، بەڵکـو لە خزمەتـی زانسـتەکانی تـریش دایە، بەجۆرێـک وەسـفی ئەو جیهـانەی ئـێمە بـۆ زۆرێـک لە ڕووداوەکـان، گشـتی بە هاوکێشـەکان تەفسـیر دەکرێـت، هاوکێشـــەمان هەیە بە نـــاوی "هاوکێشـــەکانی دیـــاردە سروشـــتییەکان"

(مــانگیران و ڕۆژگیــران)، کە دیــاردە سروشــتییەکان لێکــدەداتەوە. ئەگەر نمـونەیەک وەرگـرین، یاسـای نیـوتن بـۆ جـوڵە، یـان لە ئابوریـدا هاوکێشـەی پەیوەنـدی نرخـی کـاڵاو بـۆ داواکـاری و دابینکردنـی، ڕێـژەی بـاج و ڕێـژەی داشکاندن، کە ئەمانە گشتیان بەهۆی هاوکێشەوە هەژماردەکرێن.

هاوکێشــە دەکرێــت زیــاتر لە نەزانراوێــک لە خــۆی بگرێــت، وەک: $x + y = 3$ لەگەڵ ئەمەش، کە باســی هاوکێشــە دەکرێــت، ئەوە بیرمــان بــۆ شــیکاری هاوکێشــەش دەڕوات. بە شــێوەیەکی گشــتی، کــۆمەڵەی شــیکاری هاوکێشــەیەک، بـۆ چـوار جـۆر پۆلێنـدەکرێت، شـیکاری هەر هاوکێشـەیەک، سەر بە یەکێک لەو پۆلانەیە ، ئەوانیش:

i. کۆمەڵەی شیکار، (یەک) نرخی تێدایە.
ii. کۆمەڵەی شیکار، زیاتر لە نرخێکی تێدایە.
iii. کۆمەڵەی شیکار، ناکۆتا نرخی تێدایە.
iv. کــۆمەڵەی شــیکار، هــیچ نرخێکــی تێــدا نیــیە، واتە کــۆمەڵەی بەتاڵ ϕ .

ئەم هاوکێشـــــەی خـــــوارەوە لە وێـــنەکە، یەکـــێکە لە هاوکێشـــە ناســـراوەکانی فیزیـــا، کە پەیوەنـــدییەکە لە نێـــوان دووریـــیەک d کە شـــتێک دەیبڕێـــت (لە بۆشـــایی) لەگەڵ خێرایـــی ســـەرەتایی u ، کە هەڵـبەتە لێـــرەش تـــاودان کـــاریگەری هەیە کە بـــریتییە لە a . ئەم چەمـــاوەی خـــوارەوە دووری بەرامبەر بە کات دەنوێنێت.



هەڵسوڕاندنی هاوکێشەکان

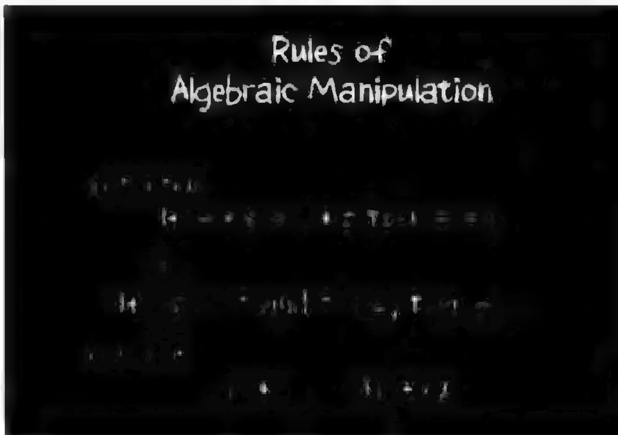
Manipulating equations

هاوکێشەکان دەکرێت سادەبکرێنەوە، لە هەندێ دۆخدا شیکاربکرێت بەهۆی بەکارهێنانیان بە شێوەیەکی لێزانانە و بە ڕێگای هەمەچەشن. کە باس لە هاوکێشە دەکەین، هەڵبەتە شتێکی تریش هەیە، ئەویش شیکاری هاوکێشەیە. بۆ هاوکێشەکان چەند تەکنیکێک هەن بۆ شیکارکردن و سادەکردنەوەیان، زۆر جار دەڵێن: بە دەستتێوەردانێک هاوکێشەکە شیکار دەبێت، واتە تەنیا بە یاریکردن بە ڕادەکانی هاوکێشەکە بە ئاسانی دەگەینە شیکاری هاوکێشەکە، بەڵام ئەمە بۆ هەموو هاوکێشەکان ڕاست نییە! لە هاوکێشەکان هەندێک کردار هەن نادیارن، بەڵام لە ڕاستیدا بوونیان هەیە، ئەو شاردنەوە و نەنووسینی ئەو کردارانە، وەک نەریتێکی هاوکێشەکان وایە. وەک لە هاوکێشەکان دەبینین کە هێمای جاران نانووسرێت (بشنووسرێت کێشە نییە). ئەگەر هاوکێشەیەک لە دوو نەزانراو پێک هاتبێت وەک: $x \times y = xy$ بەو شێوە دەنووسرێت. لە هاوکێشە بە ناوبانگەکەی ئەنشتاین دەبینین کە نووسراوە: $E = mc^2$ کە واتای $E = m \times c \times c$ هەیە. ئەم خۆلادانەش لە هەندێ شت لە کاتی کارکردن لە هاوکێشەکان تەنیا بۆ سادە دەرکەوتنی هاوکێشەکانە نەوەک شتی تر.[71] بەڵام ئەم شاردنەوەی کرداری 'جاران'ە بۆ هەموو ڕادەکان

[71] دەتوانین هێمای (×) لە نێوان دوو شت لابەرین کاتێک ئەو دوو شتە لە ڕووکار پێکنەچن. وەک: $a \times 2$ دیارە لێرە دەتوانین هێمای 'جاران' لابەرین، بەڵام بۆ : 2×3

ڕاستە؟ هەڵبەتە نەخێر، ئەگەر هەمان بێت: $6 \times 5 + 4 \times 3$ دیارە کە لێرە هێمای جاران لابەرین شتەکە دەشێوێت و دەبێتە کارێکی نامەعقولانە، ئەم شێوەی سەرەوەش تووشی سەرلێ شێوانمان دەکات! ئەی چارەسەر، چارەسەر ئەوەیە دەبێت کەوانە( ) بەکاربێنین بۆ ئەوەی لە هەندێ سەرلێشێوان خۆمان لابدەین و تووشی هەڵە نەبین، بەڵام دانانی کەوانەش هەروا بەحەزی خۆمان نییە، سەیری ئەو دوو شێوەیە بکە:

$(3 \times 4) + (5 \times 6)$ جیـــــاوازی هەیە لەگەڵ $3 \times (4 + 5) \times 6$ ،
بۆیە لە جەبر چەند یاسایەک هەن بۆ ئەو مەبەستە، کە بە یاساکانی هەڵسوڕاندنی جەبری ناسراوە، کە لە خوارەوە ئاماژەیان پێکراوە.



دیارە کە ناتوانین. چونکە ئەم دوانە پێکدەچن. بە شێوەیەکی گشتی: لابەردنی هێمای جاران لە نێوان ژمارەکان (ئەوانەی هێمایان نییە) ڕێگەپێدراو نییە.

هاوکێشە هاودەمییەکان

Simultaneous equations

هاوکێشـــە هاودەمییەکـــان، بـــریتییە لە چەنـــد هاوکێشـــەیەک بەیەکەوە ،کە چەنـــد نەزانراوێـــک لەخـــۆدەگرن. ئەگەر دوو هاوکێشـــەمان هەبێـــت کە بەو شـــێوەی کە هـــاتووە: $x - y = 1$ ، $2x + y = 3$ ،دیـــارە وەک دەبینـــین دوو هاوکێشـــەیە بە یەکەوە، کە نەزانراوەکـــانی بـــریتین لە x و y . ئەوەی گـــرنگە لەو بـــابەتە، ئەوەیە کە ئەو دوو هاوکێشـــەیە بەیەکەوە پەیوەســـتن، واتە دوو هاوکێشـــەی جیـــا و ســـەربەخۆ نـــین، دەشـــکرێت بەســـەربەخۆی لێـــانەوە بـــدوێین، بەڵام مەبەســـتی ئـــێمە لێکـــۆڵینەوەیە لێیـــان ئەگەر پـــێکەوە بـــن. مـــومکینە پرســـیارێک دروســـت بێـــت، ئەمـــانە پـــێکەوە چـــۆن قســـەیان لەســـەر دەکرێـــت؟ پرســـیارەکە ئەوەیە، دوو هاوکێشـــە و دوو نەزانراومـــان هەیە، شـــێکارەکە چیـــیە؟ واتە نرخـــی x و y چەنـــدە کە پاســـەدانی هەردوو هاوکێشـــەکە دەکـــات؟ بە نمـــونەیەکی ژیـــانی ڕۆژانە: ئەگەر کەســـێک دوو منداڵی هەبێت، لەگەڵیـان دەچێتە بـازاڕ، بـاوکەکە پێوسـتە چییـان بـۆ بکرێت تـا دڵـی هەردوو منـداڵەکەی ڕازی بکـات (یەک جـۆر شـت)؟ کەواتە ئەگەر دوو هاوکێشـــە پـــێکەوە بە سیســـتەمێک ســـەیریان بکەیـــن، ئەوە بەیەکەوە شـــێکارێکی هاوبەشـــیان هەیە! چەنـــدین ڕێگـــا هەن بـــۆ شـــێکاری ئەم سیســـتەمە، بە لەجیـــاتی دانـــان (Substitustion) یەکـــێکە لە ڕێگاکـــان. بەوشێوەی خوارەوە: هاوکێشەی یەکەم بە پێی x دەنووسین،

$$x = 1 + y$$

$$2x + y = 3$$

دواتر بە دانانی نرخی x لە هاوکێشەکەی ژێر ئەو،

$$2(1 + y) + y = 3$$

$$2 + 2y + y = 3$$

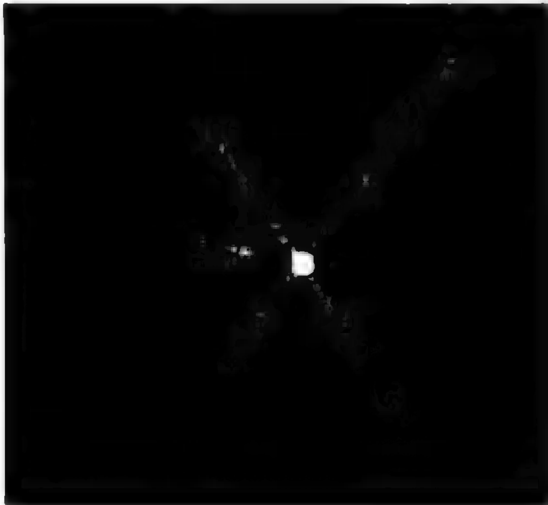
$$3y = 3 - 2 \rightarrow 3y = 1 \rightarrow y = \frac{1}{3}$$

لێرە نرخی yما دۆزییەوە کە کردییە: $y = \frac{1}{3}$، نرخی y لە یەکێک لە هاوکێشە سەرەکییەکان دادەنێینەوە و نرخی x دەدۆزینەوە، بەو شێوە

$$x = 1 + \frac{1}{3} \rightarrow x = \frac{4}{3}$$

کەواتە نرخی x دەکاتە $x = \frac{4}{3}$ و نرخی y دەکاتە $y = \frac{1}{3}$

بەگشتی، چەند نەزانراو هەبێت، دەبێت ئەوەندە هاوکێشەش هەبێت بۆ ئەوەی شیکارێکی تاقانە (Unique) بۆ هاوکێشەکان بدۆزینەوە. ئەگەر ژمارەی هاوکێشەکان لە نەزانراوەکان زیاتر بوو، ئەوە هیچ شیکارێک نییە بۆ هاوکێشەکان، ئەگەر ژمارەی نەزانراوەکان زیاتر بوو لە ژمارەی هاوکێشەکان، ئەوە ناکۆتا- بێ سنوور شیکار هەیە بۆ هاوکێشەکان. لەو وێنەی خوارەوە دەبینین کە ئەو دوو هاوکێشە هەر یەکەیان ڕاستەهێڵێک دەنوێنێت، کە وێنەی هەردوو هاوکێشەکە دەکێشین، دەبینین لە خاڵێک یەکتر دەبڕن، ئەم خاڵەش بریتییە لە شیکارەکە.



ئەم دوو ڕاستەهێڵە، دوو هاوکێشە پیشاندەدەن بە شێوەیەکی ئەندازەیی، خاڵە هاوبەشەکەش، شیکاری هەردوو هاوکێشەکە دەنوێنێت.

هاوکێشەکان و وێنە ڕوونکردنەوەییەکان

Equations and graphs

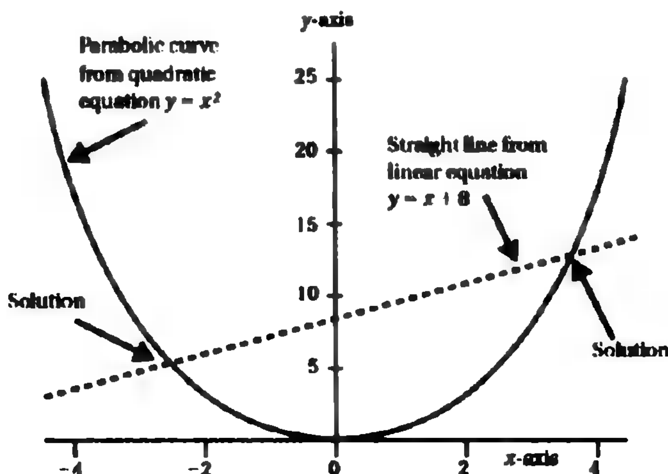
لە بابەتی پێشوو باسی هاوکێشەمان کرد. لەم بابەتە باسی وێنەی ئەو هاوکێشانە دەکەین، واتە هەر هاوکێشەیەک وێنەیەکی هەیە، هەر وەک چۆن هەر مرۆڤێک ئاسۆکێکی[72] خۆی هەیە.

لە ڕێگەی وێنەی هاوکێشەکان، باشتر حاڵی دەبین کە چۆن نرخی یەکێک لە نەزانراوەکان دەگۆڕێت بە گۆڕانی نەزانراوەکەی تر. مەبەستی ئێمە لەو هاوکێشەیە؛ کە دوو نەزانراوی تێدایە x و y ، دیاریشە ئەمانە لە تەوەرەی پۆتان، واتە ڕووتەختی دیکارتی وێنەدەکرێن. ئەگەر نموونەیەک وەرگرین، هاوکێشەی $y = x^2$، ئەمە هاوکێشەیەکی دووجایە (Sequere) کە شێوەکەی لە وێنەی بەرامبەر دراوە. لەبەر ئەوەی نەزانروای x توانی دووە، واتە بۆ هەر y یەک دوو نرخ هەن! بە واتایەکی تر ئەگەر y=4 ، ئەوە دوو ژمارە هەیە کە پاسەدانی هاوکێشەکە دەکات، ئەوانیش 2 و 2-. هەر لە بابەتی پێشوو باسی سیستەمان کرد (هاوکێشە هاودەمییەکان)، واتە چەند هاوکێشەیەک بەیەکەوە. لێرەش ئەگەر ئەم هاوکێشەی سەرەوە لەگەڵ هاوکێشەیەکی هێڵی (توان یەک) مان هەبێت، پاشان وێنەیان بکەین بە یەکەوە، بە شێوەی ئەندازەییانە دەبینین کە شێکاری ئەو دوو هاوکێشەیە بەیەکەوە چییە. وەک لەو شێوەی بەرامبەر.

---

[72] ئاسۆک: سێبەر.

دیـارە ئەو دوو وێـنەیە لە کـوێ یەکتریـان بڕیـووە، ئەوە ئەو شـوێنە دەبێـتە شیکاری هاوکێشەکان.



پەڕەبـــــۆلا-بــــڕگەی هاوتــــا واتە ئەو هاوکێشـــــەیە: $y = x^2$ و هاوکێشەی دووەم، کە هاوکێشەیەکی هێڵییە: $y = x + 8$

شـیکاری هاوکێشــەکان بەو شــێوەیە دەکرێــت: هاوکێشــەی دووەم لە هاوکێشەی یەکەم دادەنێینەوە: $x + 8 = x^2$

لەمەوەش تۆزێک ڕێکی دەخەین دەبێتە: $x^2 - x - 8 = 0$

بە یاســـای دەســـتور $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ نرخەکـــان دەدۆزیـــنەوە کە $a = 1$ ، $b = -1$ ، $c = -8$

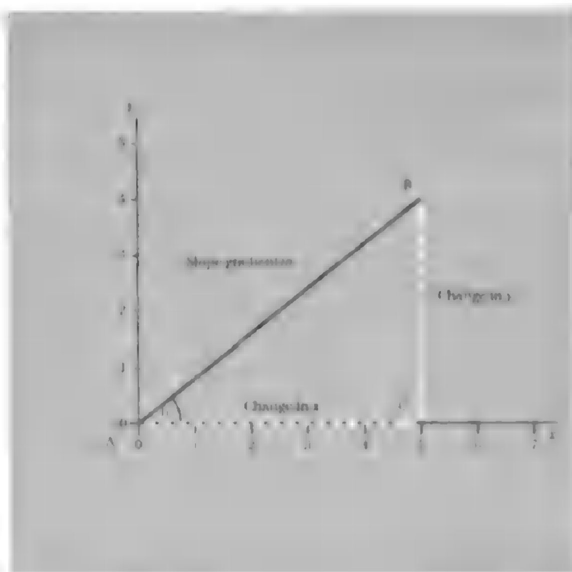
هاوکێشەی هێڵی ڕاست

The equation of a straight line

هەمـــوو هێڵێکـــی ڕاســـت لە تەوەرەی ڕووتەختـــی دوو ڕەهەنـــدی دەتوانـدرێت بە یەکێک لەو شـێوانە بنووسـرێت، ئەویش: $x = a$ کە لێرە a ژمـــارەیەکە، یـــان بە شـــێوە گشـــتییەکەی: $y = mx + b$ کە m و c دوو ژمـارەن. لێـرە m بـرِیتییە لە لاری هـێڵەکە و c بـرِیتییە لە نرخـی y کاتێـک هێڵەکە تەوەرەی y دەبڕێت.

لاری m دەتوانـدرێت لە ڕێـگەی دوو خـاڵ بـدۆزرێتەوە کە لەڕێـگەی ڕێـژەی جیـاوازی نێـوان بەرزی-سـتوونی ئەو دوو خـاڵە و جیـاوازی نێـوان درێـژی- ئاسـۆیی ئەو دوو خـاڵە، واتە بە شـێوەی بیرکارییـانە ئەگەر دوو خـــــالی وەک (x_1,y_1) و (x_2,y_2) هەبێـــــت، ئەوە لاری دەکـــــاتە: $m = \frac{y2-y2}{x2-x1}$. وەک لە وێنەی بەرامبەردا دیارە لارییەکە دەکاتە $\frac{4}{5}$.

هەردوو هاوکێشـــــەی $x = a$ وە $y = mx + b$ دەتوانـــــدرێت بە شـــێوەیەکی گشـــتی بنووســـرێت ، ئەویـــش $rx + sy = t$ کاتێـــک $r,s\ \&\ t$ ژمـارەن. دیـارە کە نابێـت هەمـوو $r,s\ \&\ t$ سـفر بێـت، چـونکە گەر هەمـوو ئەمانە سفر بێت؟



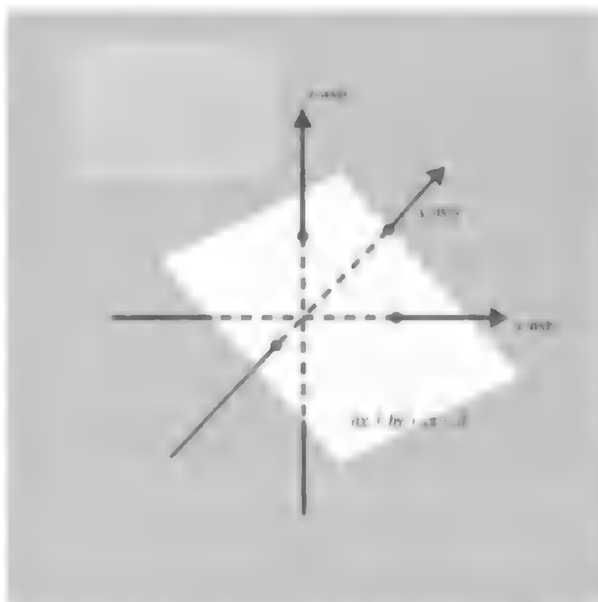
لە قۆناغەکـــانی ئامـــادەیی، قوتـــابی زیـــاتر ئاشـــنای کـــالکیلەس (Calculus) دەبێـت، جـا بـۆیە کە بـابەتی داتاشـراوە دەخوێنێـت، ئەوە زیـاتر لە بنەڕەتی لاری تێدەگات، چونکە داتاشراوە واتا لاری.

هاوکێشەی ڕووتەخت

The equation of a plane

ڕووتەخـــــت، بـــــریتییە لە ڕووەکـــــی تەختـــــی دوو ڕەهەنـــــدی لە ئـــاهووتەیەکی سـێ ڕەهەنـدی. هاوکێشـــەی ڕووتەختــیش بــریتییە لە: $ax + by + cz = d$ ، کە ئەمە هاوکێشـــە گشــتییەکە بــۆ ئـــاهووتەی ســـێ ڕەهەنـدی کاتێـک a،b،c،d ژمـارەن و بە لایەنـی کەم نابێـت یەکێـک لە مـانە سـفر بێـت؟! بـۆ نمـونە ئەگەر ئـێمە وەســفی شـێوەیەک بکەیـن لە ســێ ڕەهەنـــدی، ئەوە پێوســـتمان بە گـــۆڕاوی z دەبێـــت بـــۆ ئەوەی وەســـفی ڕەهەنـــدی ســـێیەم بکەیـــن. ئەگەر هـــاتوو a = b = 0، ئەوە هاوکێشـــەکە کـــورت دەبێـــتەوە بـــۆ $cz = d$ یـــان $z = \frac{d}{c}$ لەبەر ئەوەی d و c ژمـــارەن، ئەوە واتـا z یـش ژمـارەیە، بـۆیە لەم بـارەدا، ڕووتەخـت بـریتییە لە ڕوویکـی ئاســـۆیی لە بەرزی ژمـــارەیەک کە بـــریتییە لە z . تێبینـــی ئەوە بـــکەن کە ئەگەر a = b = 0، ئەوە گۆڕاوەکـــانی وەک x و y لە هاوکێشـــەکە بونیـــان نامێنێـت. باشــە بـۆچی نابێـت a،b،c،d هەموویـان بە یەکەوە سـفر بـن؟ واتە ئەگەر هەر گشــتیان ســفر بێــت چــی ڕوودەدات؟ پێشــتر باســی شــیکاری چەنــد هاوکێشـــەیەکمان کـــرد بەیەکەوە، وتمـــان وێـــنەی هەر هاوکێشـــەیەک دەکێشـــین، هاوکێشـــەکان لەکـــوێ یەکتریـــان بـــڕی، ئەوە ئەو خـــاڵە دەبێـــتە شـــیکار بـــۆ سیســـتەمەکە. بـــۆیە بەهەمـــان شـــێوە ئەگەر ســـێ گـــۆڕاو و ســـێ هاوکێشـــەمان هەبـــوو، ئەوە وێنەکـــان لە ســـێ ڕەهەنـــدی دەکێشـــین، دیســـانەوە جـــار هەیە شـــیکارمان نییـــە، جـــار هەیە شـــیکارێکی تاقانەمـــان هەیە، وەیـــان

ناکۆتا شیکار هەیە، کە ئەمەش دەگەڕێتەوە سەر ئەوەی ئایا ئەم سێ هاوکێشەیە بە یەکتر دەگەن یان نا، وە چۆن.



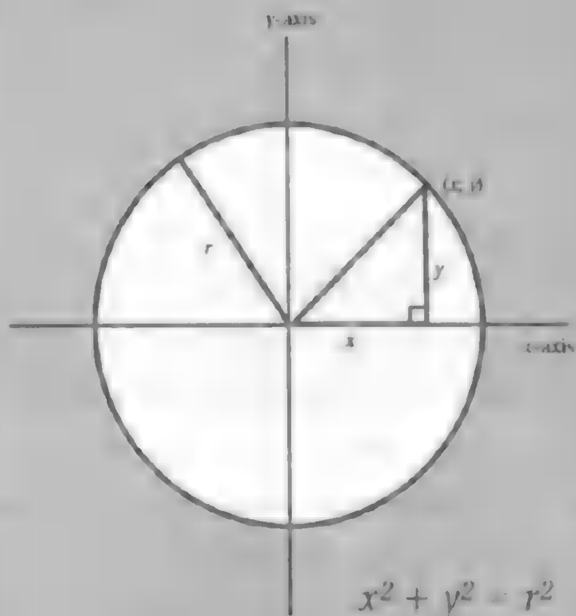
لێرە تەوەرەی x تەوەرەی ئاسۆیی دەنوێنێت، تەوەرەی z تەوەرەی ستونی دەنوێنێت، تەوەرەی y، تەوەرەیەکی ئەستوونە بەسەر تەوەرەکانی تر.

هاوکێشەی بازنە

The equation of a circle

بـــازنە، بـــریتییە لە یەکێـــک لە شـــێوە ئەنـــدازەییە زۆر گرنگەکـــان، کە بـــریتییە لە: کـــۆمەڵەی هەمـــوو ئەو خـــاڵانەی کە دەوری خاڵێکیـــان داوە لە دوورییەکـــی دیـــاریکراو، کە هەمـــوو خاڵەکـــان دوورییـــان لەو خـــاڵە (چەق) نەگـــۆڕە. بە شـــێوەی جەبـــری، دەتوانـــدرێت بە هاوکێشـــە ئەم نووســـینەی ســـەرەوە بنووســـرێت. ئەگەر بێـــت و چەقـــی بازنەکەمـــان بکەوێـــتە خـــاڵی بنەرەتـــی تەوەرەی پۆتـــان، واتە خـــاڵی (0،0) ئەوە بە بەکارهێنـــانی یاســـای فیســـاگۆرس؛ دەتـــوانیین هاوکێشـــەیەک بـــۆ بـــازنە بـــدۆزینەوە بە دەســـت نیشـــانکردنی خـــاڵێکی هەڕەمەکـــی لەســـەر چێـــوەی بـــازنەکە وەک (x,y) بـــۆ هەر دووریـــیەک لەو خـــاڵە r کە مەبەســـت لێـــی نیـــوە تیـــرەیە و ژمـــارەیەکی گەورەتـــرە لە ســـفر (ئەی ئەگـــر ســـفر بێـــت؟!)، ئەوە دەگەیـــن بەو هاوکێشـــەیە: $x^2 + y^2 = r^2$ دواتـــر هەر لە ڕێـــگەی ئەم هاوکێشـــەیەوە دەپەڕیـــنەوە بـــۆ خوێنـــدن و دۆزیـــنەوەی چەنـــد بـــابەتێکی تـــر. ئەگەر لە بیرتـــان بێـــت لە بـــڕگە قوچەکییەکـــان باســـی بازنەمـــان کـــرد، کاتێـــک ڕووتەختێـــک بە شـــێوەیەکی ئاســـۆیی قوچەکێک دەبڕێـــت، ئەوە بـــازنە دروســـت دەبێت، بـۆیە بـازنە بـارێکی تـــایبەتە لە بـــڕگە قوچەکییەکـــان. لێـــرە پرســـیارێک دروســـت دەبێـــت. چـــی ڕوودەدات ئەگەر بێت و هاوکێشەی بازنە دووجا بکەین؟[73]

[73] لەم پرســـیارە پرســـیارێکی تـــریش دروســـت دەبێـــت، ئایـــا هـــیچ بـــازنەیەک دەدۆزیـــتەوە کە یەکسان بێت بە چوارلایەکی ڕێک. واتە بازنەیەک و چوارلایەک هەمان ڕووبەریان هەبێت؟!


y-axis
r
y
x
$x^2 + y^2 = r^2$

برگە هاوتاکان

Parabolas

پەرابۆلە-بـڕگەی هاوتـا، یەکـێکە لە بـڕگە قوچەکییەکـان. بـڕگەی هاوتـا تەنیـا یەک خـاڵی بەرزتـرین یـان نزمترینـی هەیە، کە بە شـێوە جەبـری بەم شـێوەی خـوارەوە هاوکێشـەکەی دەنووسـرێت، کە لە یەک گـۆڕاودا دەکاتەوە نەخشەی دووجا:

بـریتییە $y = ax^2 + bx + c$: سـادەترین نمـونە لە بـڕگەی هاوتـا، لە: $y = x^2$ لەبەر ئەوەی x^2 ، ئەوە y گەورەتـرە لە سـفر، ئەوەش واتە هەمیشـە دوو نـرخ هەیە، ئەرێنییـەک و نەرێنییـەک، کە بەرامـبەر هەر نرخێکـی y دوو نرخـی هەیە. بـۆیە بچـوکترین نـرخ کە y هەیبێـت بـرتییە لە سـفر. تـا x گەورەتـر بێـت، ئەوە y زۆر گەورتـر دەبێـت (بەنـزبەت ئەو نەخشەیە).

بـڕگەی هاوتـا، زۆر یـارمەتی دەرە بـۆ وەسـفی جـووڵەی تەنەکـان، کـاتێ تـاودانێکی نەگـۆڕ بەسـەرییەوە هەیە، وەک: لە کـاتی هاوێشـتنی موشـەکێک، ئەوە دەزانـین کە بەهـۆی هێـزی کێشـکردنەوەی موشـەکە لە شـوێنێک دەکـاتە بەرزتـرین خـاڵی دواتـر وردە وردە نـزم دەبێـتەوە، بۆیە لە ڕێـگەی بـڕگەی هاوتـا دەتوانـدرێت ئامـانجەکە بە وردی بپێکێـت، وە چەنـدین بەکارهێنـانی تـر. لە بەکارهێنـانی تـری ئەم بـابەتە، لە یـارییەک بە نـاوی Angry birds .



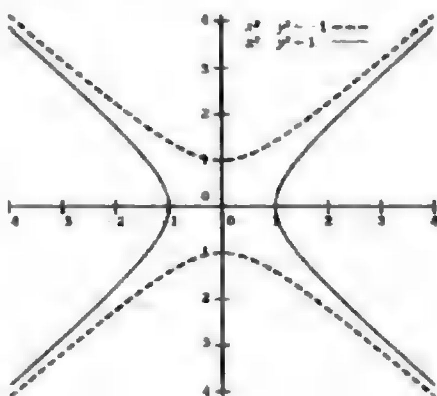
هاوکێشەکانی برگە قوچەکییەکان

Equations of conic sections

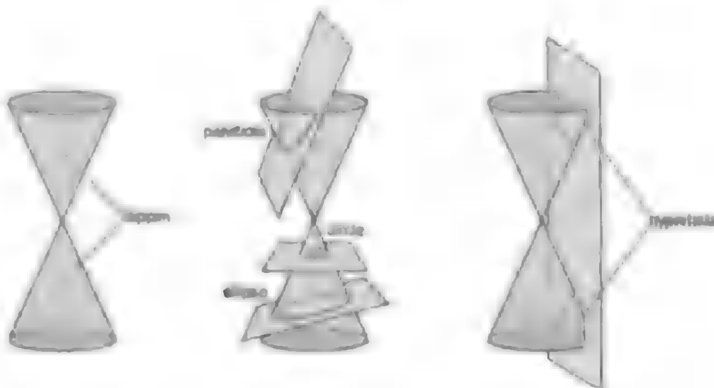
لە بابەتەکانی پێشتر باسی برگە قوچەکییەکانمان کرد، وێنەی برگە قوچەکییەکانیش کە بەهۆی برینی قوچەکەکان دروست دەبێت بەهۆی رووتەختێکەوە. ڕێسای جەبری بۆ ئەو برگانە چۆنییەکە، بە دەوری تەوەرەی z (z-axis) بریتییە لە: $|z| = x^2 + y^2$ ، کاتێک |z| بریتییە لە مەودا (Modulus) ی z بۆیە |z| یەکسانە بە z ئەگەر هاتوو z ئەرێنی (+) بوو، وە دەکاتە z− ئەگەر هاتوو z نەرێنی(−) بوو. لێرە مەودای z هەرگیز نرخێکی نەرێنی (سالب) نییە.

تەوەرەی z لە رووتەختێکی ئاسۆیی بریتییە لە نەگۆڕێک، واتە ژمارەیەک، وەک: c، کە یەکتر برینی ئەو نەگۆرە لەگەڵ قوچەکێکی ستوونی بەو شێوە پێناسە کراوە: $x^2 + y^2 = |c|$. کە ئەمەش هاوتای هاوکێشەی بازنەیە کاتێک نیوە تیرەی بازنەکە بریتییە لە: $\sqrt{|z|}$. ئەم جارە بۆ یەکتر برین لەگەڵ رووتەختێکی ستوونی، تەوەرەی y ی دەبێتە نەگۆڕێک-ژمارە، کە هاوکێشەکە بەم شێوەی لێ دێت: $x^2 + c^2 = |z|$ کە ئەمەش هاوکێشەی جووتێک لە برگەی هاوتایە (Porabolas)، کە یەکێکیان z بچوکترە لە سفر $z < 0$ ، ئەوەی تر کە z گەورەترە لە سفر $z > 0$.

بڕگەی هێلکەیی-ناتەواو (Ellipse) و بڕگەی زیاد (Hyperbola) بەهۆی یەکتربڕینێکی لارەوە دروست دەبن بەهۆی ڕووتەختەوە، واتە کاتێک ڕووتەختێ بە شێوەیەکی لار قوچەکەکە دەبڕێت. ئەگەر بێت و ڕووتەختەکە چەماوەیەکی داخراوی قوچەکەکە ببڕێت، ئەوە بڕگەی ناتەواو دروست دەبێت کە هاوکێشەکەی بریتییە لە: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.



ئەگەریش ئەو ڕووتەختە هەردوو قوچەکەکە ببڕێت، ئەوە جووتێک لە بڕگەی زیاد دروست دەبێت کە فۆرمەکەی-هاوکێشەکەی بریتییە لە: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$.

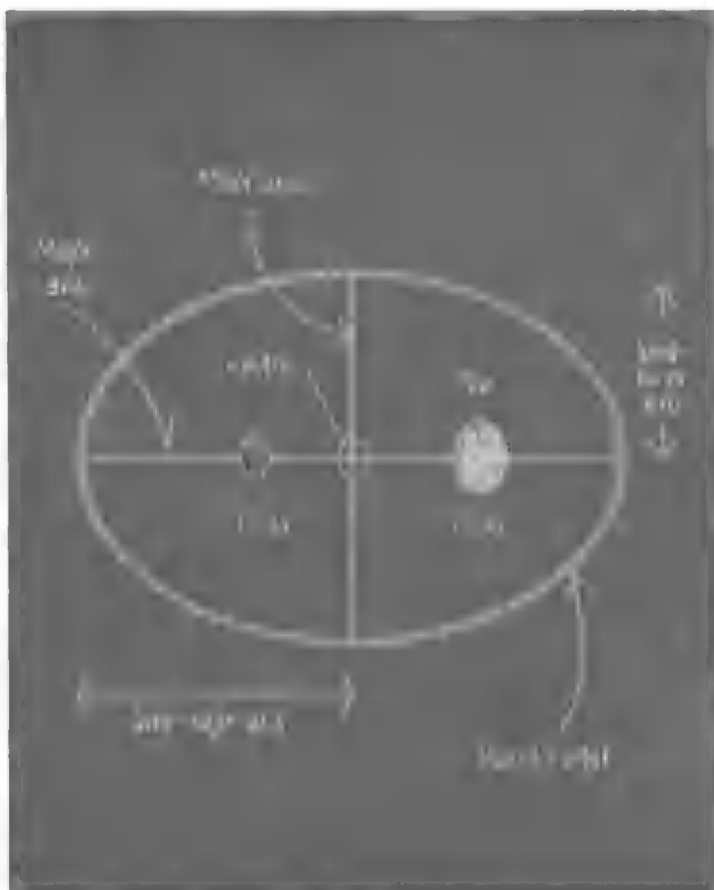


برگە ناتەواوەکان

Ellipes

بـــڕگەی نـــاتەواو، یەکـــێکە لە بـــڕگە قوچەکییەکـــان، ئەمەش کاتێـــک دروســـت دەبێـــت کە ڕووتەختێـــک بە شـــێوەیەکی لار و بەتەواوی قـــوچەکەکە دەبڕێـت. ئەو بـڕگەیەش دەکرێـت بەهـۆی ئەو هاوکێشـەیەوە گوزارشـتی لـێ بکرێـــــت، کە بـــــریتییە لە: $|z| = x^2 + y^2$. وتمـــــان ئەگەر بێـــــت و ڕووتەخـتەکە تەنیـا وەک چەمـاوەیەک قـوچەکەکە ببڕێـت، ئەوەی دەسـتمان دەکەوێـت بـریتییە لە: بـڕگە ناتەواوێـک لەو فـۆرمە: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. کاتێـک a و b دوو نەگـــۆڕن، واتە ژمـــارەن، کە a نیـــوە تیـــرەی تەوەرەی گەورەیە وb نیـــوە تیـــرەی تەوەرەی بچـــوکە. ئەگەر بێـــت و $a > b > 0$ ئەوا، لە دۆزیـــنەوەی ســـەرەکانی بـــڕگەکە، ئەمە بەکـــاردێنین: $\sqrt{(a^2 - b^2)}$ لە چەقـــی بـــڕگەکەوە. جیـــا لەمە، بـــڕگەی نـــاتەواو دەتوانـــدرێت بەو شـــێوەش پێناســـە بکرێـت: کـۆمەڵە خـاڵێکە لە ڕووتەخەختێکـدا کە سـەرجەمی دوورییـان لە دوو خـاڵی دیـاریکراو (تیشـکۆ) دەکـاتە بەهـایەکی نەگـۆڕ. لە سـاڵی 1609 زانـای ئەستێرەناســی ئەڵمـانی "یۆهـانس کیـپلەر" ڕوونیکـردەوە کە هەسـارەکان بە دەوری خـۆردا دەخـولێنەوە بە شـێوەیەک، کە هەر یەکێکیـان لە خـولگەیەکی تـایبەت، کە خولگەکـان بـڕگەی نـاتەواوە. بەگشـتی، بـڕگە ناتەواوەکـان دەتـوانن تەفسـیری جـوڵەی شـتەکانی پێبکرێـت کە لە ژێـر هێـزی ڕاکێشـانی زەوی یە، وەک: مـانگە دەسـتکردەکان لە خـولگە تایبەتییەکانیـان. ئەم کـارەی

کیــپلەر ڕاســـتکردنەوەی تیــۆرییەکەی کۆپەرنیکــۆس بــوو، کە دەیــوت: هەسارەکان لە ڕێڕەوێکی بازنەیی بە دەوری خۆر دەخولێنەوە.



ڕادەدارەکان

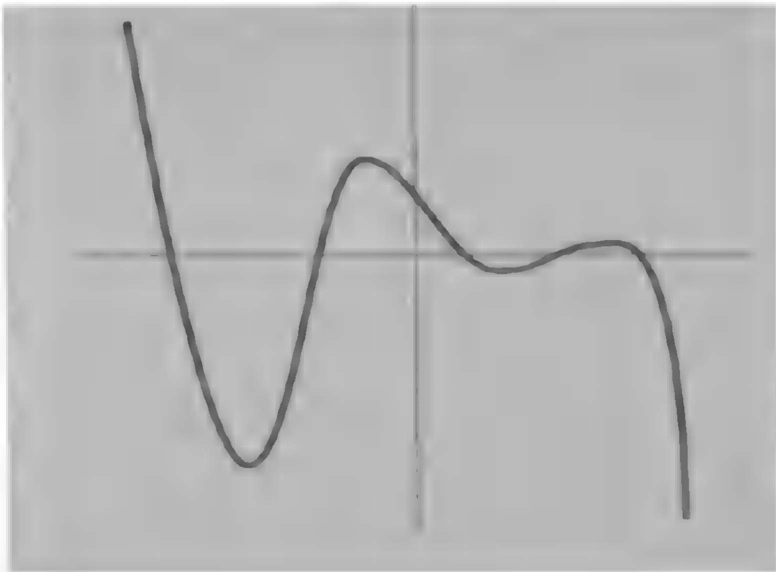
Polynomials

ڕادەدارەکـــان، بـــریتین لە دەربڕینێکـــی بیرکارییـــانە لە ســـەر شـــێوەی $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ لە کاتێـــــــــک کە a_i ژمـــــــــارەن و $i = 0،1،2،..،n$. دەشـــکرێت بە شـــێوازێکی تـــر بڵـــێن: ڕادەدارەکـــان بـــریتین لە زنجیرەیەکـــی دواهـــاتوو لە x بە توانێـــک (هێزێـــک). بەرزتـــرین تـــوان لە ڕادەدارەکـــــــــان، پێـــــــــی دەوترێـــــــــت: پـــــــــلەی ڕادەدارەکە (Degree of polynomial)، ئەو پـــلەیە دەلکێنـــدرێت بە ڕادەدارەکە، واتە ئەگەر بەرزتـــرین تـــوانی ڕادەدارێـــک 5 بێـــت، ئەوە دەڵـــێن: ئەوە ڕادەدارێـــکە لە پلەی پێنج.

ئەگەر ڕادەدارێـــک پـــلەکەی 2 بێـــت، واتە x^2 هەبێـــت، ئەوە نـــاوێکی تـــایبەتی هەیە و پێـــی دەوتـــرێن ڕادەداری چوارگۆشـــەیی (quadratic). ئەگەر تـــوانی ســـێ هەبێـــت، ئەوە پێـــی دەوترێـــت: ڕادەداری شەشـــپاڵویی (cubic). ڕادەداری پـلە یەک، پێـی دەوترێـت: هێڵـی، چـونکە وێـنەکەی تەنیـا ڕاسـتەهێڵێکە. کاتێـک دەڵـێن سـفرەکانی ڕادەدارێـک، ئەو مەبەسـتمان شـێکاری ئەو ڕادەدارەیە، واتە ڕادەدارەکە لە ◼ نرخێکـــی x دەکـــاتە ســـفر (لەکـــوێ تەوەرەی X دەبڕێت).

ڕادەدارەکـان گرنگییەکـی زۆریـان هەیە لە بـواری فیزیـا، کیمیـا، ئـابوری و زانســـتە کۆمەڵایەتییەکـــان. لە بیرکاریـــدا بـــۆ وەســـفی تایبەتمەنـــدییەکانی

ڕیزکراوەکـــــان (Matrix) بە کاردەهێنـــــدرێت، لەگەڵ ئەوەش، لە جەبـــــری پوخـــت، ڕۆڵێکـــی ئێجگـــار گرنـــگ دەگێڕێـــت. ڕادەدارەکـــان بـــۆ هەژمـــارکردنی ڕووبەر و قەبـــارە بەکاردێـــت، یـــانیش بـــۆ هەژمـــارکردنی قەبـــارەی تەلارە ناڕێکەکان.



ئەم وێـــنەیە، ڕادەدارێـــک دەنووێنێـــت کە لە 5 شـــوێن تەوەرەی xی بڕییە، واتە ڕادەدارێکە لە پلەی 5.

هاوکێشەی پلە دوو

Quadratic equations

هاوکێشـــەی پـــلە دوو، ئەو هاوکێشـــەیە کە گـــۆڕاوێکی تێـــدایە، کە بەرزتـــرین تـــوانی ئەو گـــۆڕاوە بـــریتییە لە 2. واتە هاوکێشـــەیە تەنیـــا دوو ڕەگـــی-شـــیکاری هەیە، کە لە دوو بەهـــا هاوکێشـــەی دەکـــاتە ســـفر. بە شـــێوەی ئەنـــدازەییانە :ئەو هاوکێشـــەیە کاتێـــک دەبێـــت بە ســـفر ئەگەر بێـــت و تەوەرەی x ببڕێـــــت، واتە $y = 0$. شـــــێوە گشـــــتییەکەی بـــــریتییە لە $ax^2 + bx + c = 0$ ، کاتێـــک نابێـــت a ســـفر بێـــت ($a \neq 0$)، ئەگەر ســـفر بێت؟

ئەگەر بێـــت و $b = 0$، ئەوە شـــیکارکردنی هاوکێشـــەکە ئاســـان دەبێـــتەوە بـــۆ شـــیکارکردن، کە: $ax^2 + c = 0$ لەمەوەش $ax^2 = -c$، پاشـــان $x^2 = -\frac{c}{a}$ ، ڕەگـــی دووجـــای هەردوو لا وەردەگـــرین و دەگەیـــنە: $x = \mp\sqrt{\left(-\frac{c}{a}\right)}$ ئەو هێمـــــایە $\mp$ واتەی ئەوەیە، دوو شـــــیکار هەیە، یەکێکـــان ئەرێنـــی و یەکێکـــان نەرێنـــی، چـــونکە x تـــوانی دووە، لەبەر ئەوەی 2 جـــــووتە، و تـــــوانی جـــــووت (-) دەکـــــاتە (+) ، واتـــــــە: $(+)^2 = +$ و $(-)^2 = +$ کە $\left(\mp\sqrt{\left(-\frac{c}{a}\right)}\right)^2 = -\frac{c}{a}$. بە دڵنیـــــــــایی ئەگەر بێـــت و $-\frac{c}{a}$ نەرێنـــی بێـــت (دوای ئەوەی کە نرخـــی c و a دەزانـــین)، ئەوە شـــیکاری هاوکێشـــەکە لە ژمـــارە ڕاســـتییەکان نیـــیە، بەڵکـــو لە ژمـــارە

ئاوێتەکانە (Complex numbers). بە شێوەیەکی گشتی، شیکاری هاوکێشەکە بریتییە لە: $x_{1,2} = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$. ئەو بڕە b^2-4ac پێی دەوترێت، بڕەی جیاکەرەوە (Discriminant) کە پێمان دەڵێت هاوکێشەکە شیکارەکانی کام جۆرەن، ژمارەی ڕاستین یان نا، ئەویش ئەگەر بێت و بچوکتر بێت لە سفر، ئەوە شیکاری هاوکێشەکە ژمارەیەکی ئاوێتەییە، ئەگەر بێت و گەورەتر بێت لە سفر، ئەوە شیکاری هاوکێشەکە ژمارەی ڕاستین، ئەگەر سفر بێت؟

$$x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

سێ جاکان، چوار جاکان و پێنج جاکان

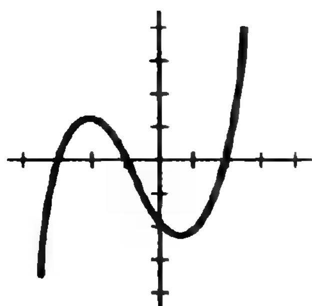
Cubics, quartics, and quintics

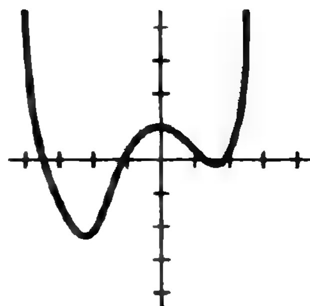
لە بـــابەتی پێشـــوو باســـی ڕادەدارە دووجاکانمـــان (Quadratic) کـــرد. ئێســتاش ڕادەدارێکــی پــلە 3 پێــی دەڵــێن: ســێ جــا-شــەش پــاڵوو (Cubic) کە بەرزتـــرین هێـــز-تـــوان لە ڕادەدارەکە بـــریتییە لە 3. ڕادەدارە پـــلە چـــوار (Quartic) و ڕادەداری پـــلە پێـــنج (Quintic) کە هەر یەکەیـــان بەرزتـــرین توانیـــان بـــریتییە لە 4 و 5. ئەگەر ســـەرنج بـــدەین، هاوکێشـــە پـــلە دووەکـــان تەنیـــا یەک خـــاڵی وەرگەڕانیـــان هەیە، هاوکێشـــە پـــلە ســـێیەکان دوو خـــاڵی وەرگەڕانیـــان هەیە، بە شـــێوەیەکی گشـــتی واتە، هاوکێشـــەکە پـــلە چەنـــد بێـــت، ئەوە خـــاڵی وەرگەڕانـــی هاوکێشـــەکە یەکـــی کەمتـــرە لە پـــلەی هاوکێشـــەکە، وەک هاوکێشـــەی پـــلە 5 دەکرێـــت 4 خـــاڵی وەرگەڕانـــی هەبێـــت نەک زیـــــاتر.

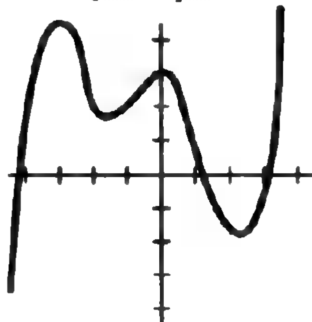
دۆزیـــنەوەی شـــیکارێکی گشـــتی (General solution) بـــۆ ئەو هاوکێشـــە پـــلە بەرزانە بە بەراورد بە هاوکێشـــەی پـــلە دوو، کـــارێکی وەهـــا ئاســـان نیـــیە! شـــیکاری هاوکێشـــەی پـــلە ســـێ، کە لە ســـەدەکانی شـــازدەهەم دۆزرایەوە، شیکارێک، دوو شیکار یان سێ شیکاری هەیە.

بەهەمـــان شـــێوە، پـــاش هەوڵ و تەقەلایەکـــی زۆر، هاوکێشـــەی پـــلە چـــواریش توانـــدرا شـــیکاری بـــۆ بـــدۆزرێتەوە، بەڵام بـــۆ هاوکێشـــە پـــلە پێـــنج، لەگەڵ هەوڵێکـــی زۆر و بەردەوام، هـــیچ شـــتێک دەســـتگیر نەبـــوو ســـەبارەت بە

شـــیکارێکی گشـــتی بـــۆ ئەم هاوکێشـــەیە، هەتـــاکو تـــا ســـاڵانی 1820 کاتێـــک ئەوە ســـەلمێندار کە شـــیکاری گشـــتی بـــوونی نیـــیە بـــۆ ڕادەداری پـــلە چـــوار بەرەو سەری! کە لە بابەتەکانی داهاتوو باسیان دەکەین.







بیردۆزی سەرەکیی جەبر

The fundamental theorem of algebra

بیـــردۆزە ســـەرەکییەکان، بـــریتین لە ئەنجـــامێکی بەدەســـت هـــاتوو کە چەقـــی ئەو پانتـــاییە ڕۆشـــندەکاتەوە کە کـــاری تێـــدا دەکرێـــت. بیـــردۆزی ســـەرەکی جەبـــر، وەســـفی ســـفرەکانی-شـــیکارەکانی ڕادەدارێکمـــان بـــۆ دەکـــات بە شـــێوەیەکی گشـــتی. دڵنیامـــان دەکـــاتەوە لە هەبـــوونی ژمـــارەی شـــیکارەکانی ڕادەدارێـــک، واتە پێمـــان دەڵێـــت: هەر ڕادەدارێـــک پـــلەکەی چەنـــد بێـــت، ئەوە بـــێ کەم و زیـــاد (Exactly) ئەوەنـــدە شیکارەشـــی دەبێـــت. واتە ئەگەر ڕادەدارێـــک پـــلەکەی 4 بێـــت، ئەوە چـــوار شـــیکاری ڕەبەقـــی هەیە، بـــۆ ڕادەدارێکـــی پـــلە n، ئەوە n شـــیکار هەیە. ئەوەش وامـــان لـــێ دەکـــات کە تێگەیشـــتنمان فراوانتـــر بێـــت لە هەمـــبەر ڕادەدارەکـــان بە جۆرێـــک لە کـــۆلکەی ژمـــارە راســـتییەوە، بـــۆ کـــۆلکەی ژمـــارە ئاڵۆزەکـــان. بیـــردۆزی ســـەرەکی، شـــیتەڵ کردنێکمـــان دەخـــاتە بەردەســـت، وەک چـــۆن شـــیتەڵی خۆبەشـــمان هەیە، ئەمەش هاوشێوەی ئەوە، کە دەڵێت:

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$$

دەتواندرێت بە شێوای لێکدانی n ڕادە بنووسرێت:

$$a_n(x - z_1) \ldots (x - z_n)$$

کاتێـــــک $z_1, \ldots, z_n$ ژمـــــارەی ئـــــاوێتەن (Complex number)، هەنـــدێکیان دەکرێـــت بەشـــە خەیاڵییەکەیـــان ســـفر بێـــت، واتە دەکرێـــت

هەنـــدێکیان ژمـــارەی ڕاســـتی بـــن. ئەگەر بێـــت و هاوکۆلکەکـــانی (Coefficients) ڕادەدارەکە a_i گشـتیان ژمـارەی ڕاسـتی بـن، ئەوە ژمـارە ئاڵۆزەکـان ئەوانەی بەشـە خەیاڵییەکەیـان سـفر نیـیە، بە شـێوەی جـووتی ئـاوەڵ دەردەکەون. ئەگەر بێـت و ڕادەدارەکە بکـاتە سـفر، ئەوە بە لایەنـی کەم (at least) یەکێـک لە ڕادەکـانی نـاو کەوانەکـان دەبێـت سـفر بێـت، بە پێچەوانەشـەوە ڕاسـتە. بـۆیە، ئەو فۆرمـولەیە پێمـان دەڵێـت: کە ڕادەدارێکـی پـلە n ، بـێ کەم و زیـاد n شـیکاری- ڕەگـی هەیە، مـومکینە هەنـدێک لە شـیکارەکان دووبـارە بێـتەوە، وە هەنـدێکیان مـومکینە شـیکاری ڕاسـتی- ژمارەی ڕاستی نەبن.

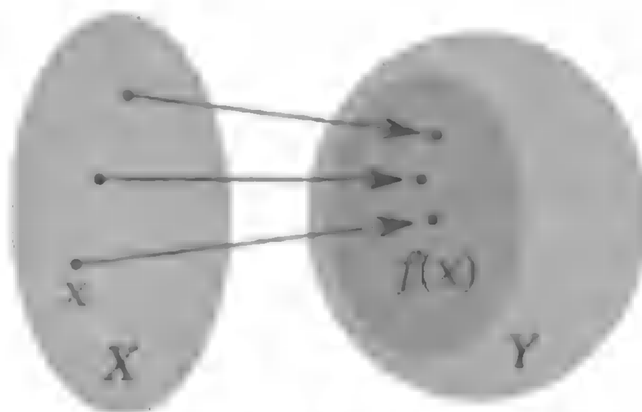
شـــیکاری دووبـــارە بـــووەوە، ئەو شـــیکارەیە کە زیـــاتر لە جارێـــک دەبێـــــتەوە شـــــیکار بە پێـــــی هەل و مەرجـــــی ڕادەدارەکـــــــە، وەک: $(x-a)^2=0$ یەک شـــیکاری هەیە، کە بـــریتییە لە a ، بەڵام شـــیکارەکە دوو جـار دووبـارە دەبێـتەوە. ئەمەش دراوەتە پـاڵ بیرکـاریزانی نـاوداری ئەڵمـانی 'کـارڵ گـاوس'[74] (Karl gauss) کە ئەو ئەنجـامەی لە سـاڵی 1799 بڵاوکـــردەوە. لەگەڵ ئەمەش، لە ســـەلماندنەکەی گـــاوس، کەم و کـورپییەک هەبـوو، بـۆیە سـەلماندنەکە بە شـێوەیەکی ورد و دروسـت، لە ساڵی 1920 بە کۆتا گەیشت.

[74] بیرکـار و فیزیکزانـی گەورەی سـەدەی هەژدە و نـۆزدەی وڵاتـی ئاڵمانیـایە. لە وتەیەکـی خۆیدا بیرکـاری بە شـاژنی هەمـوو زانسـتەکان نـاو دەبـات. گـاوس یەکێکە لە بیرکـاریزانە هەر دیارەکـان لە هەمـوو کاتێکـدا، کە جـێ پەنـجەی لە زۆربەی لقەکـانی بیرکـاری دا دیـارە، وەک لە پێشتر باسمانکرد.

بەشی شەشەم

نەخشەکان و کاڵکیلەس

Functions and Calculus



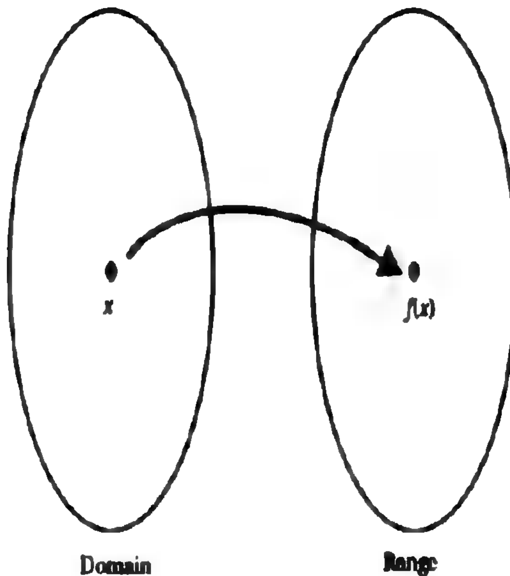
$$f : X \to Y$$

نەخشە

Function

نەخشـــە، بـــریتییە لە پەیوەنـــدییەک لە نێـــوان دوو کـــۆمەڵە A و B، بەو مەرجەی کە $A,B \neq \phi$، بـــۆ هەر دانەیەک x لە کـــۆمەڵەی A دەبێـــت تەنیـــا یەک دانەی بـــێ هاوتـــا (Unique) y هەبێـــت بەو مەرجەی کە $f(x) = y$. ئەمە پێناســـەی نەخشـــەیە. بەو x ە دەڵـــێن گـــۆڕاو، واتە تەنیـــا یەک ژمـــارە وەرناگرێـــت، زۆر ژمـــارە وەردەگرێـــت. نەخشـــە وەک عەســـارەی شـــەربەت دروســـتکردن وایە، لەســـەرەوە میوەکـــانی تێـــدەکەی، ئەویـــش گوشـــراوی ئەو میـــوانەت پـــێ دەدات. نمـــونەیەکی ســـادە، ئەگەر نەخشـــەیەکمان هەبێـت بەو شـــێوە بێـــت: $f(x) = x + 2$ واتە تـــۆ هەر نرخێـــک x بـــدەی بە نەخشـــەکە، ئەو x ەکەت پێـــــــدەداتەوە و 2 شـــــــی بـــــــۆ زیـــــــاد دەکـــــــات، واتە $f(2) = 2 + 2 = 4$. یـانی وەک ئەوە وایە یەکێـک بێـت و پێـت بڵێـت، تـۆ 2 هەزارم پێبـــدە، مـــن لە بەرامـــبەر 4 هەزارت پـــێ دەدەمەوە. هەر نەخشـــەی لەم جۆرەمـــان نیـیە، نەخشـــەکان زۆرن و ئـــی واش هەیە تـــۆزێ ئـــاڵۆزە، وەک نەخشـــە سێگۆشـــەییەکان، ڕادەدارەکـــان و نەخشـــە توانییەکـــان. بـــۆیە جـــومگەی ســـەرەکی بیرکـــاری، بـــریتییە لە نەخشـــەکان! لەســـەرەوە وتمـــان بەو x دەڵـــێن گۆڕاو، واتە چەنـد شـتێک دەگـرێتە خـۆی، وەک عەسـارەی شـەربەت تەنیـا بـۆ شـــەربەت دروســـتکردنە، خـــۆ ناکرێـــت بچـــین ماســـی بخەیـــنە نـــاوی! بـــۆیە دەبینـــین لێـــرە x ەکە تەنیـــا میوەکـــان وەردەگرێـــت، دەشـــکرێت هەنـــدێک لە میوەکـــان نەک هەمـــووی، بـــۆیە ئەو شـــتانەی x کە دەیگـــرێتە باوەشـــی خـــۆی،

پێـــان دەوتـــرێن بـــوار (domain)- بـــواری نەخشـــەی f. کاتێـــک نرخێـــک دەدەیـــن بە نەخشـــەکە، ئەویـــش شـــتێکمان پێـــدەداتەوە و شـــتێک بەرهەم دێنێـــت، ئەوە بەو بەرهەمە دەوترێـــت: مەودا (Range)- مەودای نەخشـــەی f. یـــانی کە لە عەســـارەکە شـــەربەت دروســـت بـــوو، ئەوە بە شـــەربەتەکە دەوترێـت مەودا، وە بە میوەکـان بە شـێوەی سروشـتی خۆیـان پـێش ئەوەی بیخەیـنە نـاو عەسـارەکە پێی دەوتـرێن بـوار، هەنـدێ جـار پێی دەڵـێن: وێنە- image. پیتـی f هەر لە پیتـی یەکەمـی $function$ هـاتووە، تـۆ ئەگەر حەزت لێـیە، پیتـی یەکەمـی نـاوەکەت یـان هەر پیتێـک و ڕەمزێکـت دەتـوانی بەکاری بێنیت.



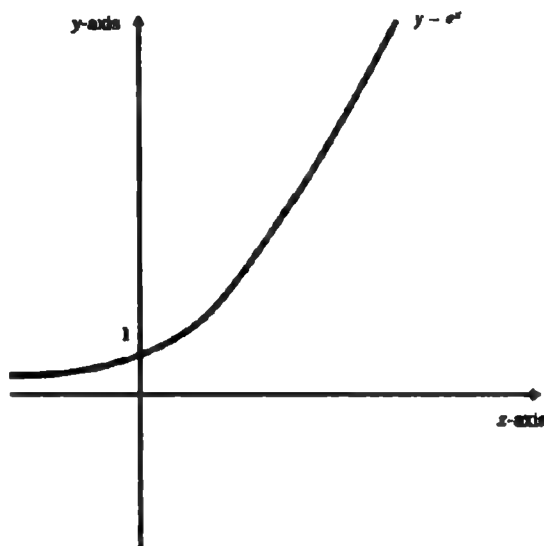
نەخشەی توانی

The exponential Function

نەخشـــەی تـــوانی، مـــومکینە گرنگتـــرین و بەرچـــاوترین نەخشـــە بێـــت لە بیرکاریـــــدا، هاوکـــــات لەگەڵ نەخشـــــەی خـــــۆیی (Identity function). نەخشـــەی تـــوانی، بەم شـــێوەیە پێناســـە کـــراوە کە $f(x) = b^x$ کاتێـــک b بـــــریتییە لە بنچیـــــنە؛ کە ژمـــــارەیەکی نەگـــــۆڕە و، x گـــــۆڕاوەکەیە، وەک: $f(x) = e^x$ نەخشـــەیەکی هەمیشـــە ئەرێنیـــیە، واتە ئەگەر بێـــت و x لە $-\infty$ نزیـــک بکەیـــنەوە، ئەوکـــات نەخشـــەکە لە ســـفر نزیـــک دەکەوێـــتەوە. وێـــنەی ئەم نەخشـــــەیە بەرز و نزمـــــی، نشـــــێوی تێـــــدا نیـــــیە، وەک ئەوە وایە بەردەوام بەســـەرکەوی، واتـــا تـــا دێـــت وێـــنەی نەخشـــەکە بەرز دەبێـــتەوە. ئەوەی زۆر جـــــوان و ســـــەرنج ڕاکێشـــــە لەو نەخشـــــەیە، ئەوەیە کە لاری وێـــــنەکەی دەکـــاتەوە نرخـــی نەخشـــەکە! ئەوە واتـــا چـــی؟ واتە لاری نەخشـــەکە لە هەر خاڵێـــک x تەنیـــا نرخـــی x لە نەخشـــەکە دانیـــوە ئەوە لاری ئەو نەخشـــەیەت لەو خـــــاڵە دەســـــت دەکەوێـــــت، بە کـــــورتی واتە تـــــاکە نەخشـــــەیە کە داتاشـــراوەکەی دەکـــاتەوە نەخشـــەکە خـــۆی: $f(x) = f'(x)$. ئەم نەخشـــەیە دیـــاردەی هەمەچەشـــنمان بـــۆ ڕوونـــدەکاتەوە، وەک گەشـــەی ڕووەکەکـــان، پەتـــا، شـــیبوونەوەی مـــادەیەکی تیشـــکدەر و گەشەســـەند و چەنـــدین شـــتی تـــر لە ڕێـــگەی ئەم نەخشـــەوە لێیـــان تێـــدەگەین. لە پـــاڵ ئەمەش، ئەم نەخشـــەیە هەوێنـــی بونیـــاتی چەنـــدین نەخشـــەی تـــرە، سەردەکێشـــێتە نـــاو چەنـــدین بـــابەتی تـــری بیرکـــاری و لـــقە جیاجیاکـــانی بیرکـــاریش! ڕەنـــگە یەکێـــک بپرســـێت ئەو e

چییە (پێشتر باسمان کردووە)؟ ئەوە ژمارەیەکە، نەگۆڕێکی بیرکارییە کە نرخەکەی بە نزیکی دەکاتە 2.71 کە بە نەگۆڕی ئۆیلەر ناسراوە، ئۆیلەریش یەکێکە لە بیرکاریزانە هەرە دیارەکانی ناو بیرکاری. ئەم نەخشەیە دەتواندرێت لەسەر شێوەی زنجیرە بنووسرێت:

$$1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots = e^x$$



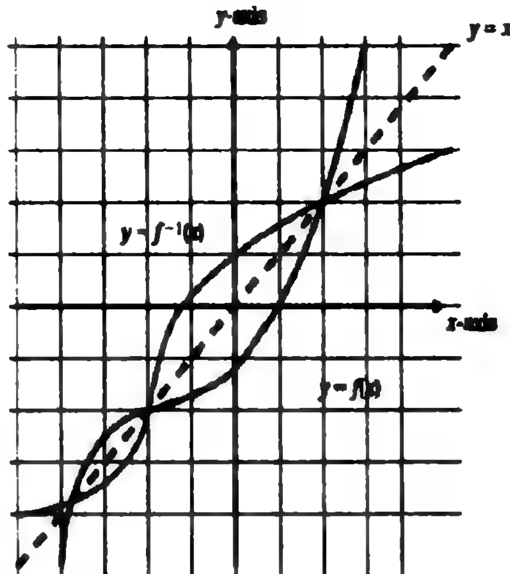
ئەم نەخشەیەی سەرەوە نەک هەر داتاشراوەکەی دەکاتەوە خۆی، بەڵکو تەواوکارییەکەشی هەر دەکاتەوە خۆی (لە گۆڕاوی X)

هەڵگەڕاوەی نەخشە

Inverse function

هەڵـگەڕاوەی نەخشــە، بـریتییە لە کـاری پـێچەوانەی نەخشــەی بنەڕەتــی کە بە $f^{-1}(x)$ دەنووســرێت. وەک چــۆن دەزانــین کە کــرداری پــێچەوانەی کــۆکردنەوە بــریتییە لە کــرداری کەم کــردنەوە، وەک: دژە کــۆکردنەوەی 3 بـریتییە لە 3-، یـان دژە لێکـدانی 7 بـریتییە لە $\frac{1}{7}$. لە بـابەتی پێشـوو وتمـان $f(x) = x + 2$، واتە کـــابرایەک هەبـــوو، دەیـــوت، تـــۆ ئەگەر 2 دینـــارم بـدەیتێ، ئەوە مـن 4 دینـارت پـێ دەدەم، ئێسـتا وا دانـێ کـابرا دێـت یەخەت دەگرێـت و پێـت دەڵێـت هـا ئەوە 5 دینـار، تـۆ دەبێـت چەنـدی پـێ بـدەیت؟ تـۆ دەبێــت 7 دینــاری پــێ بــدەیت! ئــا بەمە دەوترێــت نەخشـــەی هەڵــگەڕاوە (Inverse function). نەخشـــەی هەڵــگەڕاوە بــۆ ئەو نەخشـــەی ســەرەوە دەکـــاتە: $f^{-1}(x) = x - 2$. لە نەخشـــەی $f(x)$ ئەگەر 8 پـــێ بـــدەین، ئەوە 10 دەداتــێ، لە نەخشـــەی هەڵــگەڕاوەی $f^{-1}(x)$ ئەگەر 10 پێبـــدەین، دەبینــین 8 دینارەکەمــان پــێ دەداتەوە. لە بـابەتی پێشــوو نەخشــەی خۆیمــان (Identity function) خوێنـــد، واتە $f(x) = x$، کە ئەو نەخشـــەیە رێـــک وەک ئــاوێنە وایە، چیـــی بخەیـــتە بەردەمـــی، هەر هەمـــان شـــت نیشـــان دەداتەوە، کەواتە نەخشــەی هەڵـگەڕاوەی نەخشــەی خـۆیی چییـە؟ دیـارە هەر خـــۆیەتی، واتە $f^{-1}(x) = x$. نەخشـــــەی توانیمـــــان خوێنـــــد، وەک: $f(x) = e^{x}$ هەڵــگەڕاوەی ئەو نەخشـــەیە دەکـــاتە لۆگـــاریتمی سروشـــتی، واتە نەخشـــــەی لۆگـــــاریتمی $f(x) = ln\,(x)$. نەخشـــــەی لۆگـــــاریتمی

سروشـــــتی وەک ڕووبەری نـــــاوچەیەک دەردەکەوێـــــت، هەر بـــــۆیە تەواوکـــارییەکەی $y = \frac{1}{x}$ کاتێـــک لە 1 بـــۆ n بێـــت. $ln\ (n)$ هەژمـــاری ڕووبەری چەمـــاوەی لەگەڵ ئەو تایبەتمەنـــدییە جـــوانەی نەخشـــەی لۆگـــاریتمی سروشـــتی، شـــتێکی تـــر هەیە کە زۆر سەرســـامکەرە، ئەوەش بە کاردێـــت بـــۆ زانینـــی ئەوەی کە ئایـــا لە خـــوار ژمـــارەی x چەنـــد ژمـــارەی خـــۆبەش هەیە، واتە لە خـــوار 100 چەنـــد ژمـــارەی خـــۆبەش هەیە بە نزیکەیـــی، کە لە بابەتەکانی داهاتوو باسی لێوەدەکەین.



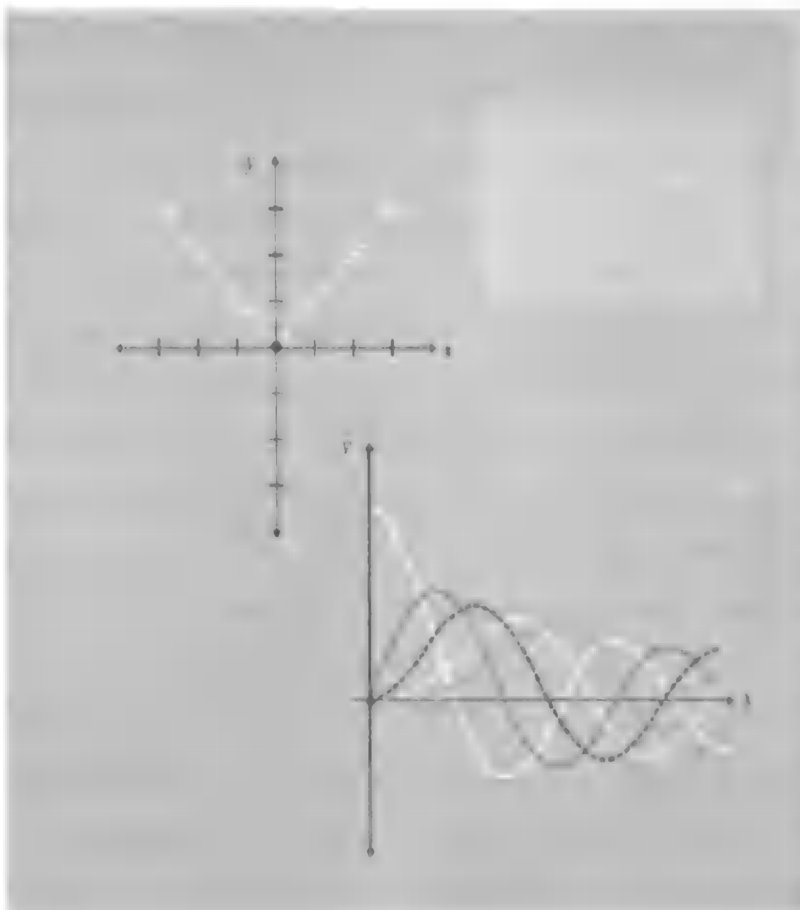
وێـــــنەکە دوو نەخشـــــە دەنوێنێـــــت، ئەوانـــــیش نەخشـــــەیەک و هەڵگەڕاوەکەی.

نەخشەی بەردەوام

Continuous Function

نەخشەی بەردەوام، یان بەردەوامی نەخشە؛ ناولێنانی بیرۆکەیە کە ئایا نەخشەیەک دەتواندرێت وێنەکەی بکێشین بەو مەرجەی لە کاتی کێشانی دەست هەڵنەگرین و بۆشایی و پچران لە وێنەکە دروست نەبێت. بە پێچەوانەی نەخشەی نا-بەردەوام کە کاتێ وێنەی نەخشەکە دەکێشین، ئەوە ناچار دەبین کە لە شوێنێک یان چەند شوێنێک دەستمان هەڵگرین پاشان دەست بە کێشانی وێنەکە بکەینەوە، دیاریشە کە ئەمە بچڕان و بۆشایی دەخاتە ناو وێنەکە. با بێینەوە سەرە نمونەی عەسارەی شەربەتەکە، گریمان سندوقێک هەنارت لایە، دانە بە دانە دەیانخەیتە ناو عەسارەکە، گریمان دانەیەک دەخەیتە ناو عەسارەکە بەڵام هیچ ئاوێکی نییە! واتە ئەو دانەیە ئاوی نەبوو (وشک بوو)، بۆیە لێرە کێشەیەک دروست دەبێت، واتە لە نەخشەی $f(x)$ نرخێک هەیە، با بڵێین ئەو نرخە بریتییە لە k، کاتێک k لە نەخشەکە دادەنێینەوە هیچ شتێکمان دەست ناکەوێت، وە یان شتێکی تەلیسماوی ڕێگەپێنەدراومان دەست دەکەوێت، بۆیە هەر نەخشەیەک تووشی کێشەی لەم شێوەیە هات، ئەوە بەو نەخشەیە دەوترێت: بەردەوام نییە. نەخشەی بەردەوامیش واتە هیچ پچڕانێکی تێدا نییە، هەر گۆڕانکارییەکی بچوک لە x بەهەمان شێوە گۆڕانکارییەکی بچوک لە نەخشەکە دروستدەکاتەوە، ئەم بیرۆکەیەش هاوشێوەی دۆزینەوەی ئامانجەکانە لە زنجیرەکان و یەکبەدوای یەکەکان،

بەڵام ئەمەش کـــارێکی هەروا ســـادە نیـــیە بـــۆ ئەوەی بـــزانین کە ئـــاخۆ نەخشـــەیەک بەردەوامە یـــان نـــا، چەنـــدین ڕێگـــا هەن، وەک ڕێگـــای پێناســـە، یانیش ئەو بیردۆزانەی کە لە ڕێگەی پێناسەکەوە هەڵجهراون.



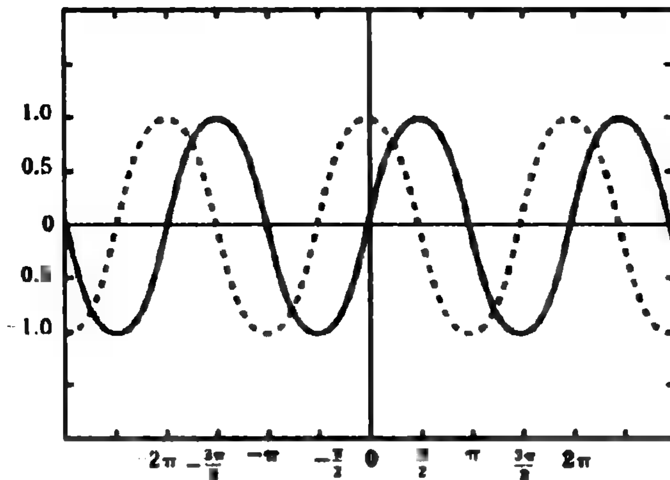
نەخشە سێگۆشەییەکان

Trigonometric Functions

نەخشـــە سێگۆشـــەییەکان، ئەو نەخشـــانەن کە گـــۆڕاوی نەخشـــەکە گۆشـــەن-Angel، کە ســـــەرەکیترینیان بـــریتین لە نەخـــــشەکانی $f(x) = tan\ (x$ ، $f(x) = cos(x)$ و $f(x) = sin(x)$،

کە پێـــان دەڵـــێن: نەخشـــە سێگۆشـــەییەکان. مەبەســـتمان لێـــی ئەو سێگۆشـــەیە کە گۆشـــەیەکی پـــلە 90 هەیە، واتە سێگۆشـــەیەکی گۆشـــە وەســـتاو. لەگەڵ ئەمەش، ئەم نەخشـــانە بەکارهێنانیـــان زۆرە لەو دیـــوی ئەنـــدازەوە. بەکارهێنـــانی لە زۆر بـــابەتی هەمەجـــۆر هەیە بـــۆ لێکـــدانەوە و تێگەیشـــتن لە هەنـــدێک دیـــاردە. کاتێـــک دێـــن وێـــنەی ئەو نەخشـــانە دەکێشـــین، ئەوە وێـــنەکەی کڵێشـــەیەکی-دووبـــارەبوونەوەی ڕێـــک پیشـــان دەدات، بەجۆرێـــک بـــۆ هەر خولێـــک 360 یان 2π ، ئەوە وێـــنەکە خـــۆی دووبـــارە دەکـــاتەوە، بـــۆیە بەو نەخشـــانە دەوتـــرێن نەخشـــەی خـــولی-دەوری وە بە ئینگلیـــزی پێـــی دەوترێـــت Period. ئەمەش گرنگییەکـــی زۆری هەیە لە خوێنـــدنی فیزیـــا و بە تـــایبەت لە بـــابەتی شـــەپۆلەکان. نەخشـــەی ســـاین نەخشـــەیەکی تـــاکییە (odd funcrion)، چـــونکە $sin(-x) = -sin\ (x)$ ،واتە وێـــنەی نەخشـــەی ســـاین، وێـــنە دانەوەیە بە دەوری خـــاڵی بنەڕەتـــی تەوەرەی پۆتـــان(0,0). کۆســـاین نەخشـــەیەکی جـــووتییە (even function)، چـــونکە $cos(-x) = cos\ (x)$ ، واتە وێـــنەی نەخشـــەی کۆســـاین وێـــنەدانەوەیە بە دەوری تەوەرەی y لە ڕووتەختـــی پۆتانـــدا. نـــاوی ســـاین لە

بەمانـای کەوانەیـی دێـت، وە "کـۆ سـاین" هەر لە سـاینەوە پەیـدابووە، ئەگەر سـەرنج بـدەین کـۆ-سـاین (Cosine)، لێـرە ئەم (کـۆ-co) لە وشـە ئینگلیـزییەکە وەرگیـراوە (sine of Complimentary) . هەردەم مەودای ئەو نەخشـانە لەنێـوان 1- و 1 دایە، واتە مەودای ئەم نەخشـەیە لە نێوان ئەم دوو بەهایە تێپەڕناکات.



هێڵکـارییە پچڕپچڕەکـان نەخشـەی کۆسـاین دەنوێنێـت، وە هێڵکـارییە ئاساییەکە وێنەی نەخشەی ساین دەنوێنێت.

بیردۆزی بەهای ناوەندی

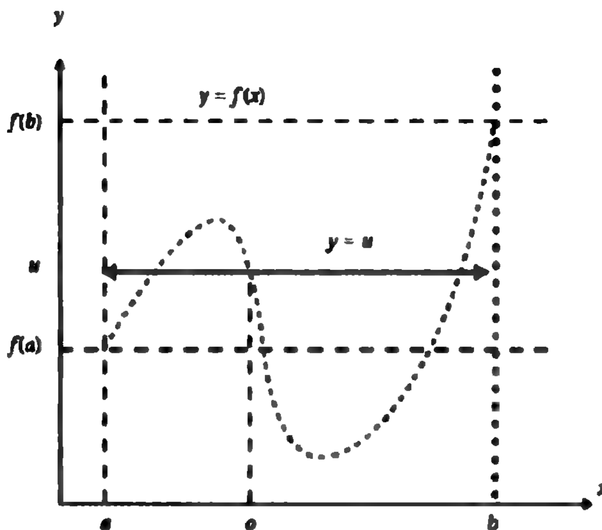
The intermediate value theorem

بیردۆزی بەهای ناوەندی، بیردۆزێکە لە مەڕ نەخشە بەردەوامەکان، ئەو نەخشانەی کە دەتوانین وێنەکەیان بکێشین بێ ئەوەی دەستمان هەڵگرین و وێنەکە بۆشایی بکەوتێ. دەقی **بیردۆزەکە دەڵێت:**

بۆ هەر نەخشەیەکی بەردەوام، هەر ژمارەیەک y لە نێوان دوو ژمارەی تری مەودای نەخشەکە، ئەوە لە بواری نەخشەکە، ژمارەیەک هەیە x کە لە ڕێگەی نەخشەکەوە دەمانهێنێت بۆ ئەو ژمارەیە $f(x) = y$.

واتە، بە هیچ شێوەیەک بازدانێک یان بۆشاییەک لە مەودای نەخشەکە بوونی نییە. نمونەیەک: ئەگەر نەخشەیەکمان هەبێت، 10 و 20 ی پێبدەین، ئەویش لە بەرامبەر 20 و 40 مان پێبداتەوە. ئەگەر لە نێوان 20 و 40 هەر ژمارەیەک هەڵبژێرین، ئەوەی دەبێت لە بواری نەخشەکە ژمارەیەک هەبێت بمانهێنێتەوە بۆ ئەو ژمارەی هەڵمانبژارد، واتە لە نێوان 10 و 20 دەبێت ژمارەیەک هەبێت. با بێنەوە سەر نمونەی عەسارەی شەربەتەکە، تۆ لە کۆمەڵێک میوە شەربەتێکی کۆکتێلت دروست کرد، هەر میوەیەک بە ڤیتامینێک یا سودێک ناسراوە، ئەگەر بێت و شەربەتەکە بەرینە تاقیگە، دەبینین ڤیتامین k لە ناو شەربەتەکە هەیە، واتە: ئیلا-حەتمەن لەوسەر کە شەربەتەکە دروستکراوە، مۆزی تێدابووە. ئەمە هەمووی لەسەر نەخشەی بەردەوام قسەی لەسەر دەکرێت، بەڵام

هەنــدێ نەخشـــە هەن، لەگەڵ ئەوەی بەردەوامـــیش نیـــنە، بەڵام لە مەودایەک ئەوشــتە هەر جــێ بەجــێ دەکەن. ئەم بیــردۆزە بــۆ ســەلماندنی زۆرێــک لە بــابەتی تــر بەکاردێــت، کە دەتــوانین لە ڕێــگەی ئەم بیــردۆزی بگەیــنە ئەوەی کە بــۆ هاوکێشــەیەک، 'شــیکار' بــوونی هەیە یــان نــا. هەروەهــا ئەم بیــردۆزە وەک کەرەســـــــتەیەک وایە بـــــــۆ بیـــــــردۆزی لەفەی گۆشـــــــت (Ham sandwich theorem) واتە کاتێــک پــارچە گۆشــتێکمان هەیە لە نێــوان دوو پــارچە نــان-ســەمون، کــاتی گەزەی لــێ دەدەی، ئەوە بە دڵنیــایی گەزەت لە هەردوو پـــــارچەکە داوە، ئـــــێ کە گەزەت لە هەر دوو پـــــارچەکە دەدەی، ئەوە بە دڵنیایی گۆشتەکەش گەزەکەی بەردەکەوێت.



کالکیلەس

Calculus

جیاکاری و تەواوکاری-کالکیلەس، سەرەکیترین لقی بیرکاری، کە بەگشتی دەربارەی گۆڕانە-خێرایی و تاودان (chang). بە گشتی دوو شت دەگرێتە خۆی، ئەوانیش داتاشراو و تەواوکاری، هەر بۆیە پێی دەوترێت جیاکاری و تەواوکاری. لە داتاشراو ڕێژەی گۆڕان و لە تەواوکاریدا ڕووبەری ژێر چەماوەیەک هەژماردەکات، یان نەخشەی بنەڕەتی بۆ نەخشەیەک کە داتاشراوەی وەرگیراوە. هەموو ئەو بیرکارییەی بەر لە کالکیلەس فێری دەبین، گشتی بیرکاری وەستاوە-جێگیر (Static)، لەکاتێک جیاکاری و تەواوکاری بیرکاری جوولەن (Dynamic). قوتابی هەر لە قۆناغی ئامادەیی ئاشنایەتی لەگەڵ کەڵکیلەس پەیدا دەکات. وشەی کەڵکیلەس بە واتای وردە بەرد دێت لە بنەڕەتدا، واتە بۆ ژماردن. داتاشراو و تەواوکاری هەردووکیان لە بابەتێک هاوبەشیان هەیە، ئەوانیش لە ئامانجەکان (Limits)، هەم لە دۆزینەوەی گۆڕان-ئامانج بەکاردێنێت، هەم لە دۆزینەوەی ڕووبەری ژێر چەماوەیەک-ئامانج بەکاردێنێت، وە زۆر بە وردی بە دوای ئەم پرۆسەیەوەیە. گرنگترین بەکارهێنانەکانیان لە خوێندنی خێرایی، کێشکردن و تاودان، کە بۆ هەر یەکێک لەم بابەتانە، بناغەکەی لە کەڵکیلەسەوە سەرچاوەدەگرێت و فۆرمولە دەکرێت. بیرۆکەی پشت کالکیلەس، بریتییە لەو پەیوەندییە ناوازەییەی کە هەیە لە نێوان گۆڕانێکی بچوک لە نێوان

بـــوار و مەودا، واتە ئەو ژمـــارەی بە نەخشـــەکەی دەدەیـــن و ئەو ژمـــارەی نەخشـــەکە پێمـــان دەداتەوە. "بیرکـــاری کـــرداری-Applied maths" پشـــت بە کـــالکیلەس دەبەســـتێت بـــۆ کـــارکردن، چـــونکە بەشـــێکی زۆر لە دیاردەکـــان لە فیزیـــا و کیمـــا و بوارەکـــانی تـــر بەگشـــتی بە هـــۆی کالکیلەســـەوە وەســـف دەکرێن و لێکدەدرێنەوە.



ڕێژەی گۆڕان

Rates of change

بەهۆی وێنەی نەخشەوە، دەتوانین ئەو ڕێژەی گۆڕانە بپێوین کە لە نەخشەکە ڕوودەدات. ئەگەر بێت و وێنەی نەخشەکە بەرز و نزمی تێدا بێت، ئەوە ئەو گۆڕانەی ڕوودەدات زۆر خێرا دەبێت، بەڵام ئەگەر بێت و تەنیا لەسەر یەک ڕەوت (بەرز و نزمی تێدا نەبێت) بێت، ئەوە ئەو گۆڕانەی ڕوودەدات، زۆر کەم دەبێت، کە ئەمەش لێکچوونێکی فیزیکی هەیە.

مەبەست لەگۆڕان لێرە بریتییە لە لاری نەخشەکە، واتا لە تەوەری x ئەو گۆڕانەی ڕوودەدات لە بەرامبەر بەرزییەکە چۆن دەگۆڕێت لە تەوەرەی y؟ بۆ نەخشەی هێڵی، لاری نەخشەکە نەگۆڕێکە، کە لاری نەخشەکە لە هەموو شوێنێکی نەخشەکە هەر هەمان شتە، ئەگەر سەیری نەخشەی هێڵی بکەین، دەبینین کە: $y = mx + b$ کاتێک m لاری نەخشەکە دەنوێنێت. بەگشتی بۆ نەخشەکانی تر، دەبێت خاڵێک دەست نیشان بکەین بۆ ئەوەی لاری نەخشەکە لەو خاڵە بدۆزینەوە، چونکە وێنەی هەر نەخشەیەک بە دەر لە وێنەی نەخشەی هێڵی و نەخشەی نەگۆڕ، ئەوانی تر وێنەکانیان چەماوەن (Curve). بۆ دۆزینەوەی لاری نەخشەیەک لە خاڵێک، ئەوە پێویستمان بە خاڵێکی تر دەبێت. وەک چۆن ئەگەر بمانەوێت تانکییەک بەرینە سەربان، ئەوە دوو کەسی دەوێت، لەو دوو کەسە دەبێت، یەکێکیان خۆت بێت، ئەوی تر هەر کەسێک بێت کێشە

نییە. دۆزینەوەی لاری نەخشەیەک لە خاڵێک، واتا دۆزینەوەی داتاشراوی ئەو نەخشەیە، پاشان دانانەوەی خاڵەکە؛ لە داتاشراوی نەخشە بنەڕەتییەکە، ئەوە لاری ئەو نەخشەیەمان دەست دەکەوێت لەو خاڵەی مەبەستمانە.

لاری نەخشەی نەگۆڕ دەکاتە سفر، نموونە وەک: $f(x) = 5$ وێنەی ئەم نەخشەیە هێڵێکی ڕاستی ئاسۆییە، کە لارییەکەی سفرە. بەڵام بۆ ڕاستەهێڵێکی ستونی، لاری پێناسە نەکراوە، بۆ نموونە $x = 5$. لێرە پرسیارێک دروست دەبێت، بۆچی لاری نەخشەی نەگۆڕ-ژمارە سفرە؟ وادانێ لە ڕۆژێک پلەی گەرمی لە کاتژمێر 12 تا 6 ی دوای نیوەڕۆ بە بەردەوامی 40 پلە بوو. ئێستا، بەرزی و نزمی لە پلەی گەرمی لەو ماوەدایە چەند بوو؟ دیارە کە بەرزی و نزمی ڕووی نەداوە، بۆیە ڕێژەی گۆڕان-بەرزی نزمی سفرە. بۆ نەخشەی هێڵی، کاتێک وێنەکەی هێڵێکی لارە، ئەمەش دەکرێت بڵێین: لە کاتژمێر 3 شەو بۆ 7 بەیانی، پلەی گەرمی وردە وردە دادەبەزی، بۆ هەر کاژێرێک 2 پلە دادەبەزی، ئەمە واتە ڕێژەی گۆڕان-لاری بریتییە لە 2.

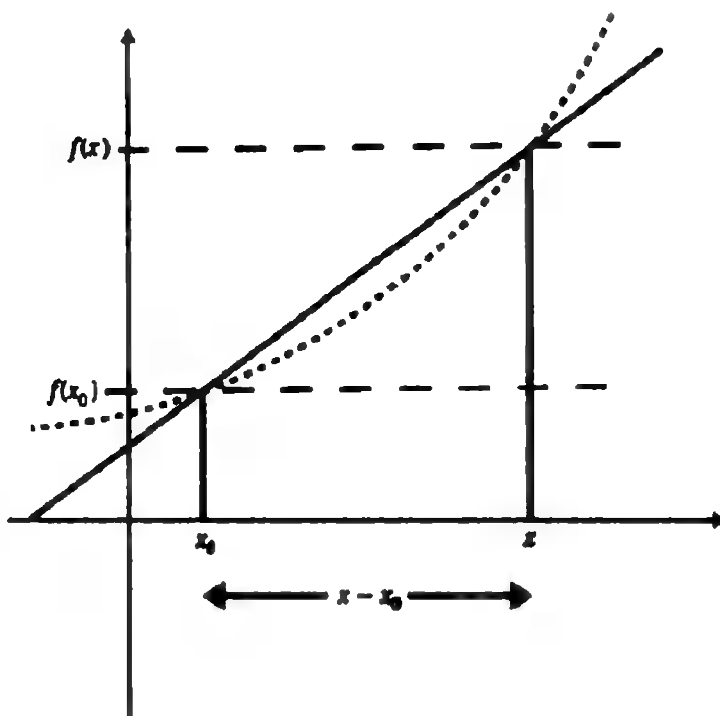


جیاکاری

Differentiation

جیاکاری، یەکێکە لە چەمکە هەرە گرنگەکانی کالکیلەس. کە تێدا لە ڕێگەی بەکارهێنانی هاوکێشەوە دەکرێت لاری نەخشەیەک بدۆزینەوە، واتە ڕێژەی گۆڕان بدۆزینەوە لە خاڵێکی دیاریکراو. سادەترین پەیوەندی لە نێوان دوو گۆڕاودا، هاوکێشەی هێڵی؛ یەکێکە لەوان، $f(x) = mx + c$ کاتێک کە m لاری نەخشەکە دەنوێنێت. ئەگەر نرخێک جێگیر بکەین و ناوی لێ بنێین x_0 لەسەر تەوەری x دا، پاشان لاری نەخشەکە لە خاڵی x داواکراوەکە بێت، ئەوە بریتییە لە ئەو گۆڕانەی ڕوودەدات لە x دا، وە y کە مەبەستمان $f(x)$. ئەم بڕانەش دیارە کە دەکاتە: $x - x_0$ و $f(x) - f(x_0)$ وەک لە وێنەکەی خوارەوەشدا دیارە. دۆزینەوەی لاری لە خاڵی x_0 گرنگە لە دۆزینەوەی m کە $f(x) - f(x_0)$ بە نزیکەیی یەکسانە بە $m(x - x_0)$، چونکە x لار دەبێتەوە بەرەو x_0 بە دەربڕینێکی تر، $x - x_0$ و $f(x) - f(x_0)$، ئەو دوو بڕە کەی یەکسان دەبن؟ بڕەی $x - x_0$ جارانی چ ژمارەیەک m بکەین یەکسان دەبێت بە $f(x) - f(x_0)$ ؟ هەرکاتێک ئەو لارییە m بۆ نەخشەکە بوونی هەبوو، ئەوە پێی دەوترێت لاری نەخشەکە-داتاشراوەی نەخشەکە.

داتاشراوەی نەخشەی f بەم شێوەیە $f'(x)$ گوزارشتی لێ دەکرێت یانیش $\frac{df}{dx}$.[75]



[75] لە ساڵی 1675، "لایبنز" دەستەواژە- دەربڕینی $\frac{df}{dx}$ ناساند بۆ جیاکاری-داتاشراوە، دوای 95 ساڵ "لاگرانج" یەکەم کەس بوو، دەستەواژە- دەربڕینی $f'(x)$ بەکارهێنا بۆ داتاشراوەی یەکەمی نەخشەیەک.

دۆزینەوەی داتاشراوە

Calculating Derivative

هەر وەک لە بابەتەکانی پێشوو وتمان چەند جۆرێک نەخشەمان هەیە. بۆیە دۆزینەوەی داتاشراوەی هەر نەخشەیەک جیاوازە لەگەڵ یەکێک-جۆری تر. یەکێک لە نەخشەکان بریتییە لەو جۆرە نەخشانە: $f(x) = x^n$ کە داتاشراوەکەی دەکاتە: $f'(x) = nx^{n-1}$ کاتێک n بریتییە لە توانی ڕەسەنی نەخشەکە.

داتاشراوەی $f(x) = x^2$ دەکاتە: $f'(x) = 2x$ ، بۆ نەخشەکانی x^3 و x^7 بە هەمان شێوە. بۆ نەخشەکانی تریش لەو شێوەی خوارەوە هەندێکیان داتاشراوەکانیان نووسراوە. ئەگەر بێت و نەخشەی $f'(x)$ خۆی توانای داتاشراوەی هەبێت، ئەوە دووبارە دەتوانین داتاشراوی بۆ وەرگرینەوە، واتە داتاشراوەی دووەم بۆ هەر هەمان ئەو نەخشەی سەرەوە کە نووسیومانە، کە داتاشراوەی دووەمی نەخشەکە دەکاتە: $f''(x) = n(n-1)x^{n-2}$. بۆیە دووبارە بەهەمان شێوە ئەگەر n مین داتاشراوەی نەخشەکە بدۆزینەوە، ئەوە بەو شێوە ئاماژەی پێ دەکەین: $f^{(n)}(x)$.

بۆ ئەم جۆرە نەخشەی سەرەوە کە نووسیومانە، ئەوە بە زیاتر وەرگرتنی چەندین جار داتاشراوەکەی، ئەوە توانی نەخشەکە وردە وردە بچوک دەبێتەوە و کوڵکەی گۆڕاوی نەخشەکە گەورە و گەورەتر دەبێت،

بەڵام بە بەردەوام بوون لەو کارە، لە کۆتایی لە شوێنێک بە وەرگرتنی داتاشراوەی نەخشەکە، نەخشەکە دەبێتە سفر، وەک چۆن نەخشەی $f(x) = 2x$ بە داتاشراوەی دووەم نەخشەکە دەبێت بە سفر: $f''(x) = 0$.

f	f'
$\sin x$	$\cos x$
e^x	e^x
$\cos x$	$-\sin x$
x^n	nx^{n-1}

پێکبەستنەوەی نەخشەکان

Combining functions

پێکبەستنەوە، واتە چەند نەخشەیەکمان هەبێت، لێکی بدەین و نەخشەیەکی نوێ دروست بکەین لە ڕێگەی ئەو چەند نەخشەی هەمانە.

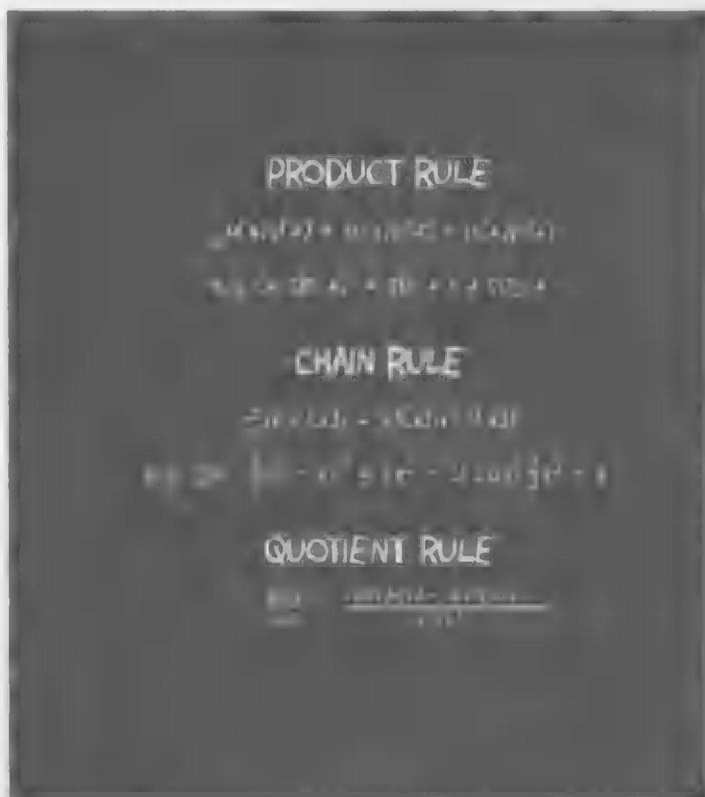
بۆ ئەو مەبەستە دوو ڕێگای سەرەکی هەن، ئەوانیش: کردارەکان لەسەر نەخشەکان (کەم، کۆ، جاران و دابەش)، یان ئاوێتەکردنی نەخشەکان. ئەگەر دوو نەخشەمان هەبێت $g(x)$ و $f(x)$ ئەوە بە ڕێگای یەکەم، ئەگەر بێت و دوو نەخشەکە بەهۆی کرداری جاران-لێکدان، لێکدانی یەکتری بکەین، واتە: $f(x).g(x)$ ، وەک: ئەگەر $f(x) = x^2$ و $g(x) = sin(x)$ ئەوە لە ڕێگەی لێکدانی ئەو دوو نەخشەیە، نەخشەیەکی نوێمان دەست دەکەوێت ناوی دەنێین: $h(x) = sin(x)\,x^2$.

ئاوێتەکردنی دوو نەخشە بەو شێوە دەکرێت $g(f(x))$ یان $f\big(g(x)\big)$ ، دیاریشە کە ئەم دووانە یەکسان نین.

$$f\big(g(x)\big) = f(sin(x)) = (sin(x))^2$$

$$g\big(f(x)\big) = g(x^2) = sin(x^2)$$

دۆزینەوەی داتاشراوەی ئەم نەخشانەش بە بەکارهێنانی یاسای زنجیر (Chain rule) دەکرێت، کە لە خوارەوە بە وێنە ڕوونکراوەتەوە چۆن.



تەواوکاری

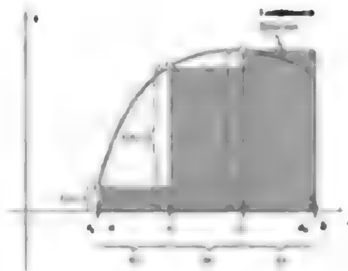
Integration

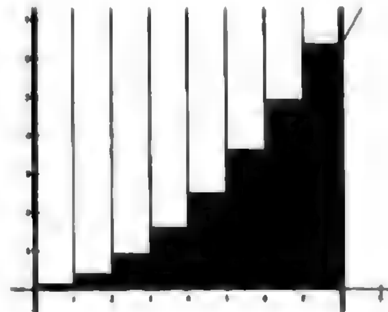
مەبەست لەتەواوکاری، بریتییە لە دۆزینەوەی ڕووبەری بن-ژێر چەماوەیەک یا وێنەیەک کە سنورێکی هەیە. لە خوارەوە ئەگەر سەرنجی چەماوەی نێوان هەر دوو خاڵی a و b بدەین: دەبینین دۆزینەوەی ئەو ڕووبەرە ئاسان نییە، چونکە شێوەکەی ڕێک نییە تا یاسای ڕووبەر شێوە زانراوەکان بەکاربێنین، ئێمە یاسای ڕووبەر تەنیا بۆ تەنێکی شێوە زانراوی وەک، بازنە، سێگۆشە، چوارگۆشە و لاکێشە دەزانین، بۆیە بۆدۆزینەوەی ڕووبەرێکی لەم شێوە، ئەوە پێوستمان بە تەواوکاری هەیە.

بیرۆکەکەش ئەوەیە: سەرەتا ئەو ڕووبەری دەمانەوێ بیدۆزینەوە بە چەند پارچە هێڵێک، بەش بەشی دەکەین، وادانێ لەسەرەتا دەیکەینە سێ بەش، وەک لە وێنەکەدا دیارە، ئەو سێ بەشە لاکێشەن، ئێمەش ئەزانین ڕووبەری لاکێشە چۆن دەدۆزێتەوە، ئەویش درێژی جارانی پانی، بۆیە ڕووبەری هەرسێ لاکێشە دەدۆزینەوە، پاشان هەر سێکیان بەیەکەوە کۆدەکەینەوە، ڕووبەرەکەمان دەست دەکەوێت، بەلام بە نزیکی، چونکە ئەو ژمارەی دەستمان دەکەوێت ڕاستەقینە نییە، لەبەر ئەوەی هەندێک کەم و کوری هەیە، واتە ئەگەر سەیری لاکێشەی یەکەم بکەین، دەبینین لە بەشی سەرەوە، هەندێ ڕووبەرەکە لە دەرەوەی چەماوەکەیە، لەوەی دوای ئەو، لەسەر لاکێشەکە بەشێک بەجێ ماوە لە لاکێشە بچوکەکە، مەسافەیەک زۆرمان بەجێ هێشتووە! ئەی چارەسەر؟

چارەسەرەکە ئەوەیە هەتا زیاتر لاکێشە دروست بکەین، ئەوە زیاتر و زیاتر لە نرخی راستەقینەی رووبەرەکە نزیک دەکەوینەوە، بەجۆرێک ئێمە لە بیرکاری ژمارەی ئەو لاکێشانە بۆ ناکۆتا نزیک دەکەینەوە، بەو شێوەش رووبەری راستەقینەمان دەست دەکەوێت. لە وێنەی دوای ئەو ژمارەی لاکێشەکانمان زیاتر کردووە، بۆیە وەک دیارە کەم بەش هەیە فەرامۆشمان کردبێت. بۆیە دۆزینەوەی رووبەری لەم شێوە ،بەهۆی یاسای تەواوکارییەوە دەکرێت، کە بریتییە لە: $\int_a^b f(x)dx$ واتە دۆزینەوەی رووبەری نەخشەی f لە ماوەی a و b دا کاتێک $a < b$.

ئەو تەواوکارییەی ئێمە لە قوتابخانە خوێندوومانە، هەتا ئەوەی لە زانکۆش دەخوێندرێت، پێی دەوترێت: تەواوکاری ریمان (Riemann integration). جیا لە تەواوکاری ریمان، تەواوکاری تریش هەن، وەک: تەواوکاری لیبیگ (lebesgue integration).





بیردۆزی سەرەکی لە کالکیلەس

The fundamental theorem of calculus

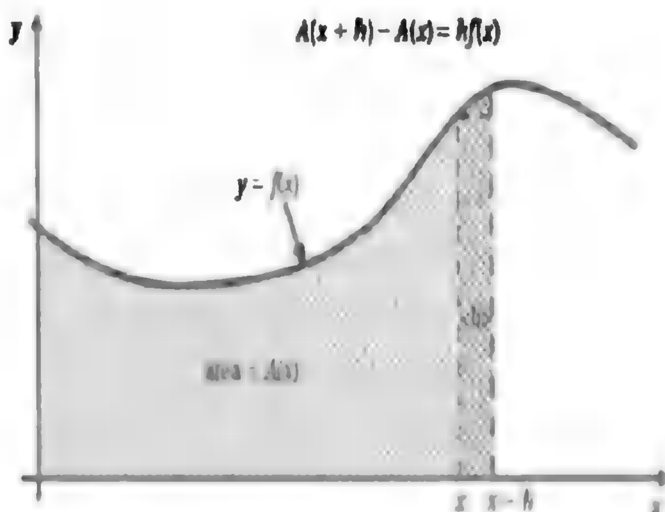
بیــــردۆزی ســـــەرەکی کـــالیکلەس دەڵێـــت: تەواوکـــاری پـــێچەوانەی داتاشـــــراوەیە. بیـــرۆکەکەش لەوە ســــەرچاوەی گرتـــووە کە تەواوکـــاری نەخشـــەی $f(x)$ دەکرێـت وەک نەخشـــەیەکی نـوێ ســـەیر بکرێـت $F(x)$. لەم پەیوەندییەش دەبینین کە: $F(x) = \int^x f(u)du$.

لێـرە ئەو نەخشـــە نـوێیە بە پیتـی کەپیـتەڵ هێمـا دەکرێـت، بە شـێوە بـــاوەکەی وا دەنووسرێـــــت: $F(x) = \int f(x)dx$. بـــۆ ئەوەی خـــوێنەری سـەری لـێ نەشـێوێت. ئەم جـۆرە تەواوکـارییە پێـی دەوترێـت تەواوکـاری بـێ ســــنوور، کە ئەم تەواوکـــارییە هـــیچ پەیوەنـــدییەکی بە ڕووبەر نیـــیە، ئەو تەواوکـــارییەی کە پەیوەنـــدی بەڕووبەرەوە هەیە، تەواوکـــاری ســـنوردارە. گەر لەو دەستەواژەی سەروە وردبینەوە دەبنین کە:

$$\int f'(x) = f(x) + c$$

ڕەنـــگە یەکێـــک پرســـێت ئەو C چیـــیە زیادمـــان کـــردووە؟ لەبەر ئەوەی داتاشـراوەی ژمـارە-نەگـۆڕ دەکـاتە سـفر، بـۆیە ئـێمە ئەو نەگـۆڕە کە ناومـان لـێ نـاوە C زیـادی دەکەیـن، پێـی دەوتـرێن نەگـۆڕی تەواوکـارییەکە. هەر

بــۆیە نەخشـــەی $F(x)$ پێشـــت بەو نەگـــۆڕە نـــا بەســـتێت، چـــونکە داتاشراوەکەی دەکاتە سفر.



ســەلماندنی ئەنــدازەییانە بــۆ بیــردۆزی ســەرەکی کــالکیلەس. ڕووبەری ئەو بەشــە پەراوێــزەی کە بە h پیشــاندراوە، دەتــوانین بخەملێنــدرێت بەهــۆی $h \times f(x)$ یــان گەر هــاتوو نەخشــەکەمان بریتیــی بێــت لە $A(x)$، ئەوە ئەو ڕووبەر هەژماردەکرێت بەهۆی $A(x+h) - A(x)$.

تەواوکاری و سێگۆشەزانی

Integration and trigonometry

هەژمـــارکردنی تەواوکـــاری بـــۆ هەنـــدێک لە نەخشـــە ســـەرەکییەکان، پەیوەنـــدی بە نەخشـــە سێگۆشـــەییەکان هەیە. ئەمەش ئەوە دەخـــاتەڕوو کە نەخشـە سێگۆشـەییەکان چەنـدە گرنـگ و سـەنتەرن بـۆ بیرکـاری. بەجۆرێـک ئەگەر هاتبـا نەخشـــە سێگۆشـــەییەکان لە ئەنـــدازەدا پێناســـە نەکرابـــان و باسـنەکرابان، ئەوە دەبـوو لە کـالکیلەس بیـر لە شـتێکی لەو شـێوە بکەیـنەوە، چـــونکە ئەوەتـــا تووشـــی کێشـــەیەک دەبـــین کە بەبـــێ بـــوونی نەخشـــە سێگۆشەییەکان وەڵامێکی ڕاستەخۆمان نەدەبوو. نمونە وەک:

$$\int \frac{1}{(1-x^2)}dx = tan^{-1}(x) + c$$

نمـــونەیەکی تـــر کە لە وێـــنەکە خـــراوەتە ڕوو، نەخشـــەی: $tan^{-1} x$ نەخشـــەی پـــێچەوانەیە بـــۆ نەخشـــەی tan، کە ناســـراوە بە: $arctan$. ئەگەر سـەرەنج بـدەین نەخشـەی پـێچەوانە جیـاوازە لەگەڵ ئەم شـێوازەی نووسـینە: $\frac{1}{tan(x)}$ واتە، ئەمە لەگەڵ: $tan^{-1} x$ جیاوازیـــان هەیە. شـــێوازی ئاســـایی نووســـینی ئەو جـــۆرە دەربڕینـــانە بەهـــۆی بەکارهێنـــانی ئەم پەیوەنـــدییە، کە: $\int f'(x)dx = f(x) + c$ ، کە ئەمەش ئەوە دەگەیەنێـــت کە داتاشـــــراوەی: $tan^{-1} x$ دەکـــاتە: $\frac{1}{1+x^2}$. بە هەمـــان شـــێوە نەخشـــەی پـــێچەوانەی ســـاین: $f(x) = sin\, x$ پێی دەڵێن: arcsin .

f	f'	$\int f'(x)\,dx$
$\sin x$	$\cos x$	$\sin x + c$
e^x	e^x	$e^x + c$
$-\cos x$	$\sin x$	$-\cos x + c$
$\left(\frac{1}{n+1}\right)x^{n+1}$	$x^n\ (n \neq -1)$	$\left(\frac{1}{n+1}\right)x^{n+1} + c$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$\ln x + c$
$\sin^{-1} x$	[illegible]	$\sin^{-1} x + c$

بیردۆزی تایلەر

Taylor's theorem

بیــردۆزی تــایلەر[76] یەکــێکە لە بیــردۆزە هەرە گرنگەکــانی کــالکیولەس، کە دەڵێــت: ئەگەر بێــت و نەخشـــەیەک ناکۆتــا جــار توانــای داتاشـــراوەی هەبێت، ئەوە ئەو نەخشـــەیە دەتوانـدرێت لەســـەر شـــێوەی زنجیرەیەکـی تـوانی بنووسرێت. کە پێی دەوترێت زنجیرەی تایلەر.

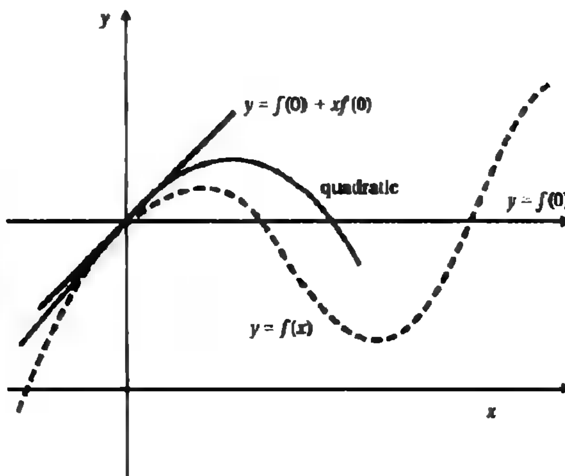
زنجیــرەی تــایلەر، بــۆ نەخشــەیەک لە دەوروبەری خــاڵی x_0 ، بــریتییە لە کــۆی چەنـــدین ڕادە کە $x - x_0$ دەگـــرنە خۆیـــان کە تـــوانیش-هێـــز وەردەگــرن و توانەکــانیش ژمــارە سروشـــتییەکانن. ئەگەر بێــت و نرخـــی x نزیک بێت لە سفر، ئەمە زنجیرەکەمان دەبێت:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}f^n(0) + \cdots$$

کاتێــک $f^{(n)}$ بـــریتییە لە n جـــارەمین داتاشـــراوەی نەخشـــەی f و (!) بــریتییە لە ئۆپەرەیتەرێــک کە پێـــی دەوترێـــت لێکــدراو (Factorial) . ئەوەی باســـمان کـــرد بـــارێکی شـــازە لە زنجیـــرەی تـــایلەر، کە پێـــی دەوترێـــت : زنجیرەی ماکلوریەن (Maclaurin serias).

[76] ناوی تایلەر لە ناوی بیرکاریزانی ئینگلیزی "تیم برۆک تایلەر" هاتووە.

ئەگەر بێت زنجیرەکە لێکنزیکبووە بێت بۆ هەموو نرخێکی X کە نزیک بێت لە x_0 ئەوە بەو نەخشەیە دەوترێت: نەخشەی شیکارەیی (Analytic)، کە نەخشەی شیکاریش زۆر گرنکە لە بابەتی شیکردنەوەی ژمارە ئاوێتەکان (complex number)، کاتێک تەواوکاری بۆ ئەو جۆرە نەخشانە دەدۆزینەوە.



لە ڕێگەی زنجیرەی تایلەر، هەنگاو بە هەنگاو بەرەو وێنە ڕاستەقینەی نەخشەکە دەڕۆین. لە یەکەم ڕادەی زنجیرەکە، وەک لە وێنەکە دا دیارە، هێڵێکی ڕاستە، پاشان ڕادەی یەکەم و دووەم بەیەکەوە، چەماوەی دووەم دروست دەبێت وەک لە وێنەکە، ڕادەی یەکەم،دووەم و سێیەم پێکەوە... بەم شێوە پەیتا پەیتا لە وێنەی ڕاستەقینەی نەخشەکە نزیک دەبینەوە.

تێ ئاخنین-چووڕاندن

Interpolation

ئەم بابەتە زیاتر لە هونەرێک دەچێت! کە بریتییە لە خەملاندنی دەرهاوێشتەی نەخشەیەک لە خاڵێکی دیاریکراو، کە ئەمەش بە پشت بەستن بە نرخە-بەها زانراوەکانی تری نەخشەکە. واتە خەملاندنی نەخشەیەک بە هۆی چەند خاڵێکی زانراوی نەخشەک (کە نازانین چییە). کە ئەمەش گرنگییەکی زۆری هەیە لە بوارە پراکتیکییەکان، کاتێ بەکاردەهێندرێت بۆ دروست کردنی پەیوەندییەکی نەخشەیی بۆ چەند نرخێکی بەرەلا[77].

وا دانێ کە ئێمە کۆمەڵێک نرخی نەخشەیەک دەزانین، کە نەخشەکەمان بریتییە لە $f(x)$ و نازانین نەخشەکە چییە! ئەو نرخانەی دەیزانین بریتین لە $n+1$ نرخ، واتە $i = 0،1،2،3،\dots،n$ ، x_i کە لە بچوکترینەوە بۆ گەورەترین ڕیزکراوە . پرسیارەکە ئەوەیە: لە نێوان ئەو نرخە زانراوانە چەندین نرخی تر هەن، ئێمە چۆن دەتوانین دەستمان بگات بەو نرخانە؟ وێنەی خاڵی ▪ بە شێوەیەکی گشتی چۆن بدۆزینەوە لە نێوان x_n و x_0؟ ئەم کێشەیەش، بەهۆی ئەو کێشانەی لە ژیانی ڕۆژانە توشمان دەبێت سەری هەڵدا، بۆ نمونە دیاریکردنی سنورێکی ناوچەیەک.

---

77 واتا نازانین ئەو نرخە لە چ نەخشەیەک بەدەست هاتووە، نرخێکی بێ سەرپەرشتیارە، ئێمە دێن سەرپەرشتیارێک-بەخێوکەرێک بۆ ئەو چەند نرخە دەدۆزینەوە کە مەبستمان نەخشەیەکە.

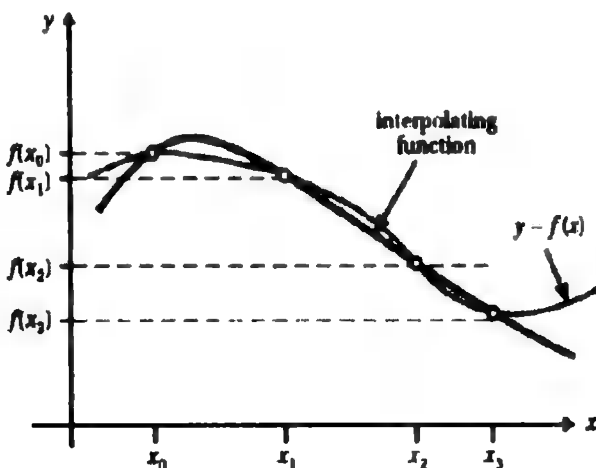
یەکێک لە ڕێگاکان بۆ وەڵامی پرسیارەکە ئەوەیە: دۆزینەوەی ڕادەدرارێک بە هۆی بەکارهێنانی ئەو زانیاریانەی هەمانە، واتە لەو داتایەی هەمانە، پاش ئەوەی ئەو ڕادەدارە دەدۆزینەوە بەهۆی ئەو داتایە، ئەوە دەتوانین نرخی هەر خاڵێک بدۆزنەوەی کە لەناو داتاکە بوونی نییە، بەڵام بە شێوەیەکی نزیکەیی.

ئەو ڕادەدارەی دەیدۆزینەوە، پلەکەی پشت بە ژمارەی دراوەکانی داتاکە دەبەستێت، ئەگەر داتاکەمان n+1 دراو بێت، ئەوە ڕادەدارەکە پەلەکەی بریتی دەبێت لە n لەگەڵ n+1 کۆلکە. بەم شێوەش دەگەینە شێوەیەک-نەخشە بۆ داتاکەمان. لە سەدەی هەژدەهەم بیرکاریزانی فەرەنسی "لاگرانج" میتۆدێکی زۆر ناوازەی دۆزییەوە بۆ ئەو بابەتەی باسمان کرد[78]، واتە نەخشەیەک بۆ داتاکەمان. میتۆدەکەی لاگرانج، پەیوەندییەکی هەیە لەگەڵ زنجیرەی تایلەر (لە بابەتی پێشوو باسمان کرد) ، بەڵام هەندێک لە کەم و کوڕیش (Error) تێدایە، چونکە Interpolation زۆر ورد نییە، لەبەرئەوەی لەسەر داتا نەخشەیەک دەدۆزینەوە.

لە وێنەکەی خوارەوە ڕۆشنە کە کەم و کوڕییەکە (Error) چییە. ئەو نەخشەی بەهۆی پێدراوەکان دەیدۆزینەو، پێی دەڵێن **نەخشەی تێ ئاخنراو**. وەک لە وێنەکە دەبینین کە نەخشە ڕەسەنەکە بە بەراورد بە نەخشە تێ ئاخنراوەکە، جیاوازییەکی هەیە.

---

[78] لە قۆناغی سێی زانکۆ ئەو بابەتەم لە وانەی 'Numerical analysis' خوێند، بە ڕاستی ئێستەش بیری ئەو وانەیە دەکەم.



لەم وێنە ڕوونکردنەوەییە، چوار قاڵ بە زەقی دیارە، کە هەردوو چەماوەکە لەو خاڵانە بە تەواوی بەیەکترگەیشتوونە، ئەمەش واتای ئەوەیە، کە ئەو نەخشە تێ ئاخێنراوەی دەدۆزینەوە، دەبێت لەگەڵ بەهاکانی داتاکەمان تەواو یەکبگرێتەوە، بۆ نموونە ئەگەر لە داتاکەمان x=3 و لەبەرامبەری y=6، ئەوە ئەو نەخشەی دەیدۆزینەوە، دەبێت بۆ x=3 نرخی yمان بداتەوە کە دەکاتە 6. لێرە بیرۆکەیەک سەرئاو دەکەوێت، ئەویش: تا داتاکەمان نرخی زیاتری تێدا بێت، ئەوە ئەو نەخشە تێ ئاخێنراوەی دەیدۆزینەوە، وردتر و باشتر دەبێت وەک لەوەی داتاکەمان بچوک بێت، بەڵام تا داتاکەمان گەورەتر بێت، دۆزینەوەی نەخشەی تێ ئاخێنراو گرانتر دەبێت.

بەرزترین و نزمترین

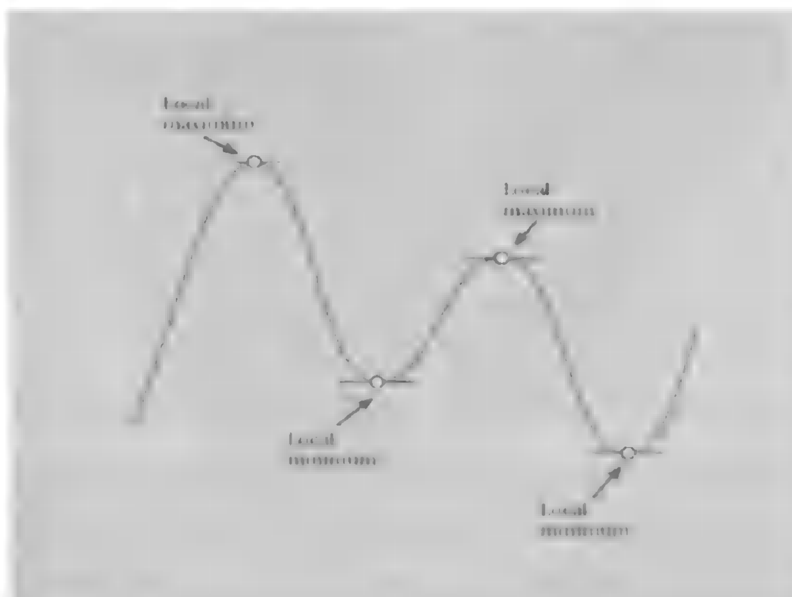
Maxima and minima

لە بابەتەکانی پێشوو، باسی نەخشە و وێنەی نەخشەمان کرد. ئەگەر بێت و سەیری وێنەی نەخشەیەک بکەین، ئەوە مومکینە بتوانین بەرزترین شوێنی وێنەکە و نزمترین شوێنی وێنەکە دیاری بکەین، واتە گەڕان بە دوای بەرزترین و نزمترین نرخ-بەهای نەخشەکە، بەم پرۆسەیە دەوترێت: optimization.

نەخشەی $f(x)$ لە خاڵی c گەورەترین نرخی هەیە ئەگەر بێت و $f(c) \geq f(x)$ بۆ هەموو نرخێکی x. بە هەمان شێوە نەخشەی$f(x)$ بچوکترین نرخی هەیە لە خاڵی d ئەگەر بێت و $f(d) \leq f(x)$ بۆ هەموو نرخێکی x. لاری نەخشەکە لە هەر یەک لەو خاڵانەی باسمان کرد، ئەوە لاری بریتیی دەبێت لە ڕاستەهێڵێکی ئاسۆیی، وەک لە وێنەکەش دا دیارە، بۆیە داتاشراوەکەی دەکاتە سفر. بۆیە ئەمەش دۆزینەوەی بەرزترین و نزمترین نەخشەکەمان بۆ ئاسان دەکات. لە خاڵی c کاتێک داتاشراوەکە لەم خاڵە سفرە، ئەوە گشت ڕادە هێڵییەکانی زنجیرەی تایلەر بوونیان نامێنێت، واتە:

$$f(x) \approx f'(c) + \frac{1}{2}f''(c)(x-c)^2 + higher\ orde\ terms$$

ئەگەر $f''(c) \neq 0$ ئەوە واتای ئەوەیە شوێنەکە وەک بڕگەی هاوتا-چەماوەی کراوە وایە، بەرزترینە ئەگەر داتاشراوەی دووەم نەرێنی(-) بێت، نزمترینە، ئەگەر بێت و ئەرێنی(+) بێت. یان ئەگەر $f''(c) = 0$ ، ئەوە موکینە خاڵی وێنەدانەوە بێت.

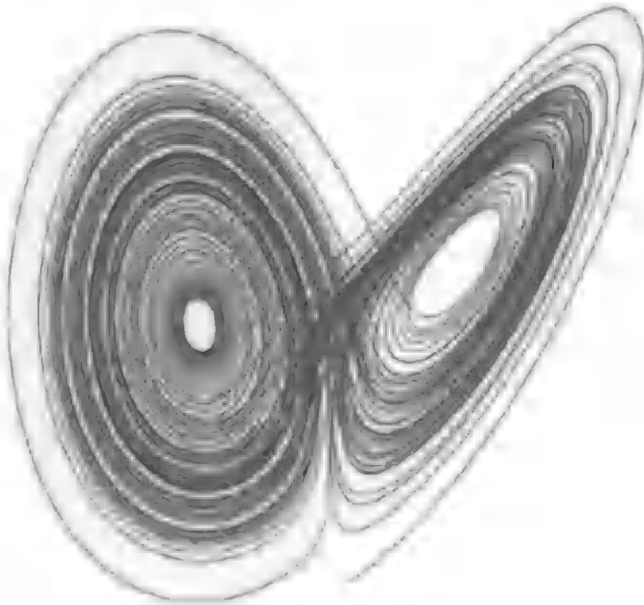


هاوکێشەی جیاکارانە

Differential equations

هاوکێشەی جیاکارانە، بریتییە لەو هاوکێشە بیرکارییەی کە تێدا نەخشەیەک و داتاشراوەی نەخشەکە لەخۆ دەگرێت، واتە پەیوەندییەکە لە نێوان نەخشەیەک و داتاشراوی ئەو نەخشەیە. هاوکێشەی جیاکارانە، بەکاربەریی هەیە لە بواری ئابوری، زانستی کیمیا و زیندەزانی، هەروەها فیزیاش کە تێدا کاتێک ڕێژەی گۆڕان لە بڕێک دەبەستێتەوە بۆ هەمان بڕکە خۆی. بۆنموونە ڕێژەی شیبوونەوەی مادەیەکی تیشکدەری کیمیایی هاوڕێژە دەبێت لەگەڵ ژمارەی ئەتۆمەکانی نموونەکە، وەک لە هاوکێشەیەک ، ئەویش : $\frac{dN}{dt} = -aN$ کاتێک N بریتییە لە ژمارەی ئەتۆمەکان، وە ▪ بریتییە لەو نەگۆڕەی کە پەیوەستە بە نیوەی تەمەنی نموونەکە و، t بریتییە لە کات. ئەم هاوکێشەیەش شیکاری هەیە، کە شیکارەکەی بریتییە لە $N(t) = N(0)e^{-at}$ ، دیارە کە ئەم دەربڕینە یەکدەگرێتەوە لەگەڵ نەخشەیەک لە شێوەی e^x، کە ئەمەش پێمان دەڵێت کە شیبوونەوەکە توانییە. هاوکێشەی جیاکارانەی ئاسایی (Ordinary)، بریتییە لەو هاوکێشەی کە تێدا تەنیا یەک گۆڕاوی سەربەخۆی تێدایە، وەک لەو هاوکێشەی سەرەوە کە "کات" گۆڕاوە سەربەخۆیەکەیە لە نموونەکە. بەڵام هاوکێشەکان زۆر جار مومکین نینە بۆ ئەوەی بە وردی شیکارەکەی بدۆزرێتەوە، زۆرجار شیکارەکەی بە نزیکەیی دەبێت - میتۆدێکی نومریکالی دەبێت. لەو نموونەی سەرەوە

$N(t) = N(0)e^{-at}$ تـــوانەکە نەرێنییـــیە، چـــونکە شـــێیبوونەوەی مـــادەیەکی تیشـــکدەرە، واتە تیشـــک بـــڵاو دەکـــاتەوە. نمـــوونەیەکی بیرکارییـــانە لە هەمـــبەر هاوکێشەی جیاکارانە وەک : $f(x) - f'(x) = 0$.



ئەو شـــێوەی ســـەرەوە، شـــێکاری هاوکێشـــەیەک دەنوێنێـــت بە نـــاوی: هاوکێشـــەکانی لـــۆرێنز (Lorenz equations)، کە چەماوەکـــان خۆیـــان دووبـــارە نـــاکەنەوە لەســـــەر یەک ڕەوت، کە ئەمەش پێکهـــاتەیەکی فراکتـــاڵی-لەیەکچوویی هەیە.

زنجیرەی فوریێ

Fourier series

زنجیـرەی فـوریێ[79] بـریتییە لەو نجیـرەی کە تێـدا نەخشـەکە لە سـەر شـێوەی کـۆی ناکۆتـا ڕادە دەنووسـرێت، کە ڕادەکـانیش سـاین و کۆسـاین دەگـرنە خۆیـان. لەبەر ئەوەی نەخشـەکانی کۆسـاین و سـاین نەخشـەی خـولین (Period) ، ئەوە واتە زنجیـرەی فـوریێ، بـریتییە لە نەخشـەیەکی دەوری یـاخود زنجیرەیەکـی خـولی. ئەگەر بێـت و نرخـی x لە نێـوان 0 و 2π بێـت، ئەوە دەتوانـدرێن نەخشـەیەکی وەک: $f(x)$ لە زنجیـرەی فـۆریەر بنووسرێت وەک:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

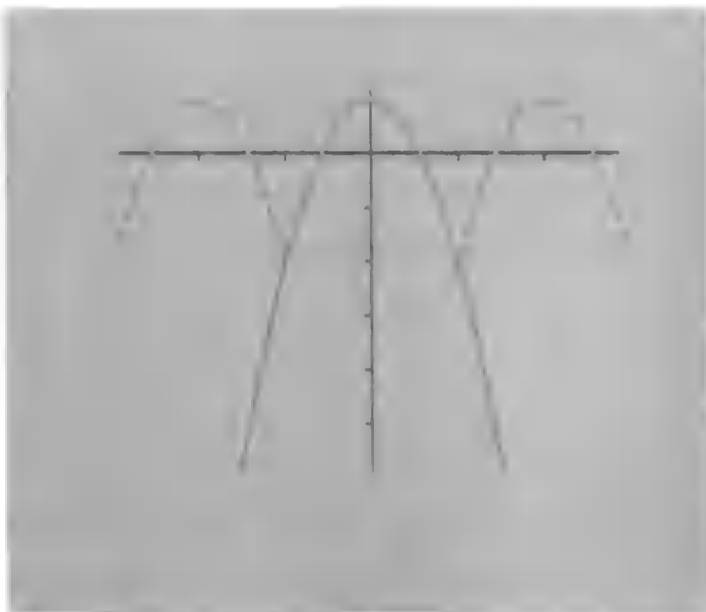
کاتێک کە :

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(kx)\,dx \quad , \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(kx)\,dx$$

---

79 ژان باپتیسـت ژۆزێـف فـوریێ (21ی ئـازاری 1768 - 16ی ئایـاری 1830) زانـای بیرکـاری و فیزیـا. خەڵکـی فەرانسـا بـوو. بە هـۆی لێـدوانەکانی لە سـەر چـۆنیەتی گواسـتنەوەی گەرمـی ناسـراوە. ئەم زنجیـرەیە یەکـێکە لە دەسـتکەوتە هەرە گرنگەکـانی بـواری زانست.

ئەگەر بێــت و نەخشــە ڕەســەنەکەمان خــولی نەبێــت، ئەوە زنجیــرەکە نەخشەکە لە ماوەیەکی دیارکراو نیشاندەدات.



ئەو وێــنەیە نەخشــەی $f(x) = 1 - x^2$ دەنوێنێــت بەهــۆی زنجیــرەی فوریێ لە ماوەی $[-\pi ، \pi]$

نەخشەی پتر لە گۆڕاوێک

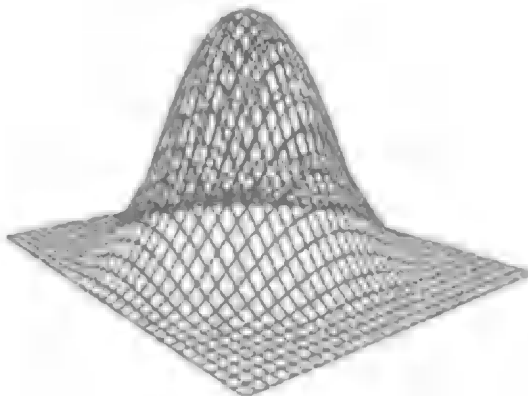
Functions of more than one variable

تـا ئێسـتا ئەو نەخشـانەی باسـمان کـردوون، یـان باسـکراون، گشـتیان نەخشـە بـوون لە یەگ گـۆڕاودا. بـۆیە نەخشـەمان هەیە لە گۆڕاوێـک زیـاتری تێـدایە. نەخشـەش لە گۆڕاوێـک زیـاتر، بـریتییە لە پەیوەنـدی نێـوان چەنـد گـۆڕاوێکی لێـک جیـاواز (سـەربەخۆ). بـا بە نمـونەیەک ئەمە ئاسـان بکەیـنەوە: عەسـارەی شـەربەتەکەت لە بیـرە؟ لەو عەسـارەیە تەنیـا باسـی میوەکانمـان دەکـرد، واتە لەوێ گـۆڕاوەکە تەنیـا میـوە بـوو، بەڵام ئەوجـارە دێـن لەگەڵ میـوەکە شـتی تـری تـێکەڵ دەکەیـن، بـۆ نمـونە کە مـۆز میـوەیە، دێـن لەگەڵ مـۆزەکە شـیری تێـدەکەین! لێـرە مـۆز میـوەیە، وەک گۆڕاوێـک، وە شـیر خـواردنەوەیە، ئەوەش گـۆڕاوێکی تـر، کە ئێسـتا دوو گـۆڕاو لە ئـارادایە. نمـونەی نەخشـەی پتـر لە گـــــــۆڕاوێک وەک: $f(x,y) = x^2 + y^2$ کە ئەمە نەخشـەیەکە لە دوو گـۆڕاو، گۆڕاوەکـانیش بـریتین لە x و y. ئـێمە پێشـتر لە نەخشـەی یەک گـۆڕاو تەنیـا نرخمـان بە x دەدا، بەڵام لێـرە دەبێـت نـرخ هەم بە x هەم بە y بـدەین، واتە ئەگەر بێـت $y = 3$ و $x = 2$ ، پاشـان لە نەخشـەکەی دابنێـنەوە، ئەوا: $f(2,3) = 2^2 + 3^2 = 13$. نەخشـەی لەو شـێوە رێگەمـان دەدات کە شـتەکان (Objects) پیشـانبدەین لە بۆشـایی سـێ رەهەنـدی یـان زیـاتریش. نەخشـەی زیـاتر لە گۆڕاوێـک، دەتوانـدرێت بە شـێوە گشـتییەکەی پێناسـەی بکەیـن کە: $f: R^2 \rightarrow R$ واتە بـواری نەخشـەکە بـریتییە لە تەوەرەی پۆتـانی دوو رەهەنـدی R^2 و مەودای

نەخشــەکە بــریتییە لە ژمــارە ڕاســتییەکان واتــا R . نەخشــە لە یەک گــۆڕاو وێــنەکەی بریتــی بــوو لە چەمــاوەیەک (Curve)، بەڵام نەخشـــە لە دوو گۆڕاو، وێنەکەی بریتییە لە ڕووەکان (Surfaces).

ئەو بیــرۆکەی ســەرەوە دەتوانــدرێت گشــتگیرتر بکرێــت بــۆ نەخشــە لە n گۆڕاوی ڕاستی، واتە $f: R^n \to R$ ، وەک:

$$f(x_1, \dots x_n) = x_1^2 + \cdots + x_n^2$$



جیاکاری بەشی-هەندەکی

Partial differentiation

جیاکاری بەشی، بریتییە لە گشتاندنێک بۆ جیاکاریکردنی نەخشە، ئەگەر بێت و ئەو نەخشەیە لەچەند گۆڕاوێک بێت. وەک: نەخشە لە یەک گۆڕاو، ئەوە جیاکاری هەر لەسەر ئەو گۆڕاوە دەکرێت خۆ شتێکی ترمان نییە. وا دانێی ئێستا نەخشەیەکمان هەیە لە دوو گۆڕاو پێکهاتووە، ئەوانیش: x و y. واتە $f(x,y) = z$. ئێستا ئەگەر بێت و باسی جیاکاری بکەین، بمانەوێ داتاشراوە بۆ ئەو نەخشەیە بدۆزینەوە، ئەوە یەکسەر دەبێت پرسیار بکەین: داتاشراوە بە پێی کام گۆڕاو؟ بە پێی گۆڕاوی x یان بە پێی گۆڕاوی y ؟ باشە ئەگەر داتاشراوە بەپێی گۆڕاوی x بێت ئەوە yچیی بەسەر دێت؟ ئەگەر داتاشراوە بە پێی ■ بێت، ئەوەی ئەوکات y وەک ژمارە سەیر دەکرێت، واتە لەو کاتە داتاشراوەی y دەکاتە سفر. وە بە پێچەوانەوە، ئەگەر داتاشراوەکە بە پێیy بێت، ئەوە x وەک ژمارە-نەگۆڕ سەریر دەکرێت و داتاشراوەکەی دەکاتە سفر. داتاشراوەی بەشی، بەو شێوە هێما دەکرێت بە پێی گۆڕاوی ■ : $\frac{\sigma f}{\sigma x}$ واتە داتاشراوەی نەخشەی f بە پێی گۆڕاوی ■، بۆ داتاشراوە بە پێی گۆڕاوی y: $\frac{\sigma f}{\sigma y}$.

نمونە ئەگەر: $f(x,y) = x^2 + y^2$، ئەوە داتاشراوە بە پێی x واتە $\frac{\sigma f}{\sigma x}$ بدۆزینەوە، ئەوە دەکاتە: $\frac{\sigma f}{\sigma x} = 2x$ و داتاشراوە بە پێی y دەکاتە: $\frac{\sigma f}{\sigma y} = 2y$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}$$

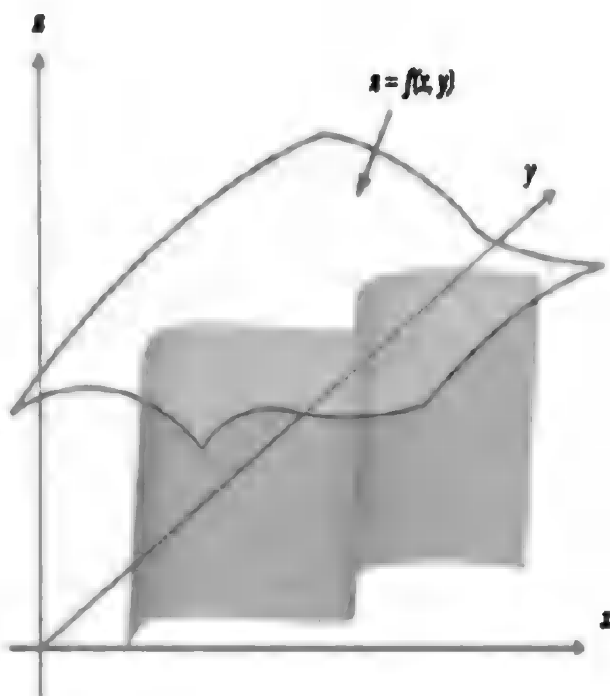
تەواوکاری لەسەر چەماوەیەک

Integration on a curve

دۆزینەوەی تەواوکاری لەسەر چەماوەیەک، هەر هەمان شێوەی تەواوکارییە بۆ نەخشەیەک لە یەکێک لە گۆڕاوەکانی، کاتێک ئەو نەخشەیە زیاتر لە گۆڕاوێکی هەیە. لە بۆشایی دوو ڕەهەندیدا ، نەخشەی $f(x,y) = z$ وێنەکەی بریتییە لە ڕوویێک. وادانێ هەر هەمان نەخشە ئەگەر بێت و $z = 0$ ئەوە ئەوکاتە ڕووەکە وەک داپۆشەرێک دەردەکەوێت کە پەیوەندی بە نەخشەی $f(x,y) = z$ هەیە. ئەو شێوەش ئاراستەی هەیە؛ کە ئەرێنییە یان نەرێنییە، بۆیە بە تەواوکاری ئەو شێوەیە زۆر جار دەوترێت: تەواوکاری هێڵی (Line integral).

ئەگەر بێت و ئەو نەخشەیەی کە لە دوو گۆڕاو پێکهاتووە، y بە ژمارەیەک دابنێین، ئەوە ئەوکات نەخشەکە دەبێتە نەخشەیەک تەنیا لە گۆڕاوی x، وە بە پێچەوانەوەش، ئەگەر بێت و x بە ژمارەیەک دابنێین، ئەوە ئەوکات نەخشەکەمان دەبێتە نەخشەیەک لە گۆڕاوی y، بۆیە ئەوکاتەش هەژمارکردنی تەواوکارییەکە ئاسان دەبێت کە بە پێی ئەو تەکنیکانە شیکار دەکرێت کە فێری بووینە.

لەگەڵ ئەمەش، بیرۆکەی تەواوکاری بە خێرایی تەشەنەدەکات و فراوان دەبێت. لەم وێنەی خوارەوە دیارە کە مەبەستمان چییە لە شێوەیەکی داپۆشەر کاتێک $Z = 0$.


z
z = f(x, y)
y
x

تەواوکاری لەسەر ڕووێک

Integration on a surface

هەمــــوو ئەو تەواوکاریـــانەی ئــێمە لە قوتابخـــانە دەیـــانخوێنین، ســـەرجەمیان هەژمـــارکردنی ڕووبەرە، واتە تەنیـــا پشـــت بەســـتن بـــوو بە گـــۆڕاوی x بەڵام ئەگەر بێـت و ڕووێکمـــان هەبێـت، نەوەک ژێـــر چەمـــاوەک، ئەوە جەتـمەن ڕووەکـان پشـت بە هەردوو گـۆڕاوی x و y دەبەستن، واتە لە ڕەهەنـــدی بەرزتـــر، بـــۆیە کاتێـــک دێـــن تەواوکـــاری بـــۆ ئەو ڕووە دەدۆزیـــنەوە، ئەوەی دەســـتمان دەکەوێـــت بریتییـــی نیـــیە لە ڕووبەر، بەڵکـــو بریتییە لە قەبارە (volume).

وا دانـــێ ناوچەیەکمـــان هەیە بە نـــاوی A لە تەوەری پۆتـــــــانی -xy و نەخشـــەیەکمان هـــــــەیە $z = f(x,y)$. بەهەمـــــان شـــێوە چـــۆن لە دۆزیـــنەوە ڕووبەری ژێـــر چەمـــاوەک هـــاتین لاکێشـــەی بچـــوک بچوکمـــان دروســـت کـــرد، پاشـــان ڕووبەری هەریەکەمـــان دۆزیـــیەوە، کشـــتیمان کـــۆکردنەوە بـــۆ ئەوەی ڕووبەری ژێـــر چەمـــاوەکە بـــدۆزینەوە، ئەوە دووبـــارە لە دۆزیـــنەوەی قەبـــارە، هەمـــان شـــت ئەنجـــام دەدەیـــنەوە، بەڵام لێـــرە ئەوەیە کە دەبێـــت ڕووەکە پـــارچە پـــارچە دەکەیـــن، دواتـــر بەرزی و درێـــژییەکەی دەپیـــوین، پاشـــان قەبـــارەی هەر یەک لەو پـــارچە بچوکـــانە دەپێـــوین، دواتـــر گشـــتیان کـــۆ دەکەیـــنەوە و قەبـــارەی ڕووەکەمـــان دەســـت دەکەوێـــت. بـــۆیە لەمەوە هەژمـــارکردنی تەواوکـــاری دووانـــی دێـــتە گـــۆڕێ، تەواوکـــارییەک بـــۆ

گۆڕاوی x و تەواکارییەک بۆ گۆڕاوی y کاتێک z نەخشـەیەکە لە x و y ، کە مەبەستیش لە A بریتییە لە ڕووەکە.

$$\iint_A f(x,y)dx\,dy$$

ئەم تەواوکـارییەی سـەرەوە بـۆ نەخشـەی f لەسـەر A پێـی دوترێـت: تەواوکـاری دووهێنـد یـان دەبـڵ تەواوکـاری. دەشـکرێت تەواوکـاری بـۆ نەخشەی فرە گۆڕاویش پێناسەبکەین.

نمـونەیەکی سـادە دێنینـەوە بـۆ ئەوەی بیـرۆکەکە ڕونتـر بێـت. وادانـێ تەرازووەکـی زۆر هەسـتیار و بچوکمـان هەیە، کە توانـای پێـوانی شـتی زۆر بچـوکی هەیە بەقەد دشـلەمەی چـا (قەنـد)، ئـێمە سـێوێکمان هەیە، چـۆن دەتـوانین ئەو سـێوە بکێشـین بەو تەرازووە بچـوکە کە لە ڕاسـتیدا توانـای کێشـانی سـێوی نیـیە؟ بیـرۆکەکە ئەوەیە سـێوەکە هەمـووی پـارچە پـارچە دەکەیـن- پـارچەی بچـوک بچـوک، دێـن کێشـی گشـت پارچەکـان دانە بە دانە دەپێـوین، پاشـان کێشـی گشـت پارچەکـان کـۆدەکەینەوە لە کۆتـایی کێشـی سێوەکەمان دەست دەکەوێت.



تەواوکاری دووانی لەسەر ئەو ڕووەی تەنیشت، کە ڕووەکی لاکێشەی سێ ڕەهەندی دەنوێنێت، ئەوەی دەستمان دەکەوێت، قەبارەی ئەو تەنەیە.

بیردۆزی گرین

Green's theorem

بیردۆزی گرین[80] یەکێکە لە بیردۆزە گرنگەکان لە جیاکاری و تەواکاری پێشکەتوو. ئەم بیردۆزە پەیوەندییەکە لە نێوان تەواوکاری هێڵ و تەواوکاری دووانی. واتە ئێمە چەماوەیەکی داخراومان هەیە، وە ڕووبەرێک هەیە دەکەوێتە ناو ئەو چەماوە داخراوە، چەماوەکەمان ناو لێ ناوە Y و ڕووبەرەکەمان ناو لێ ناوەی A لەو وێنەی بەرامبەر چاماوەکە دیارە کە چۆنە، بۆیە دۆزینەوەی تەواوکاری هێڵی بۆ ئەو چەماوەیە کارێکی وەها ئاسان نییە، بۆیە بیردۆزی گرین کۆمەکمان دەکات لە دۆزینەوەی تەواوکاری هێڵی بۆ ئەو چەماوەیە، بۆیە لەبەر ئەوەی ئەو چەماوەیە ڕووبەرێکی لەناو دایە، بیردۆزی گرین دێت لەڕێگەی ئەو ڕووبەرەوە کە کەوتۆتە ناو چەماوەکە، تەواوکاری هێڵی چەماوەکەمان بۆ دەدۆزێتەوە. بەو پەیوەندییەی خوارەوە:

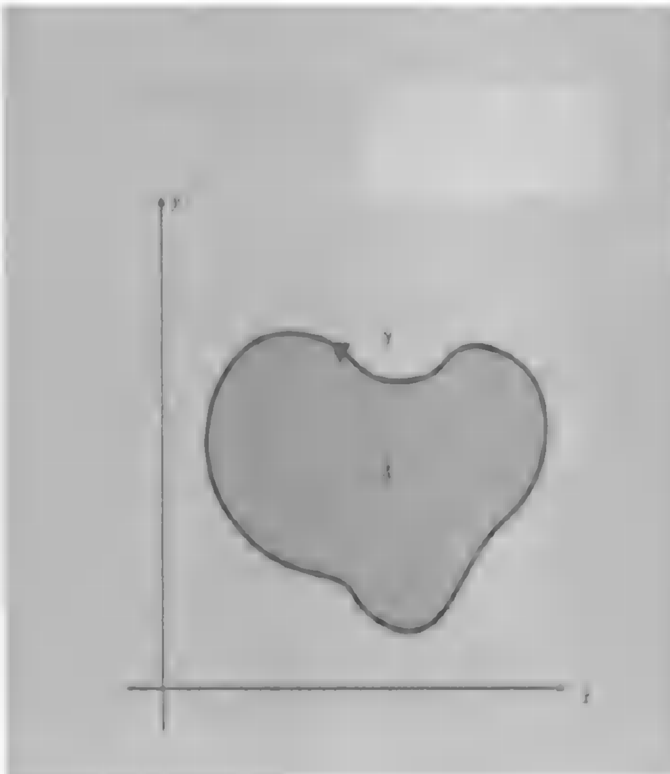
$$\int_{Y} f\, ds = \iint_{A} \left(\frac{\sigma f}{\sigma x} - \frac{\sigma f}{\sigma y}\right) dx\, dy$$

کە ds ئاماژەیە بۆ ئەو گۆڕانە بچوکە تاک ڕەهەندەی کە ڕوودەدات بە درێژایی ڕێچکەی Y. هاوکێشەی لەم شێوە پەیوەندییە پەتییەکەی

[80] جۆرج گرین، بیرکاریزان و فیزیکزانێکی بەریتانییە لە 1793 لە دایک بووە، کە لە 1841 کۆچی دوایی کردووە.

نێـــوان تەواوکـــاری و جیاکـــاری هەنـــدەکی دەگشـــتێنێت، کە ئەمەش دەستکەوتێکی گرنگە بۆ جیاکاری و تەواوکاری.

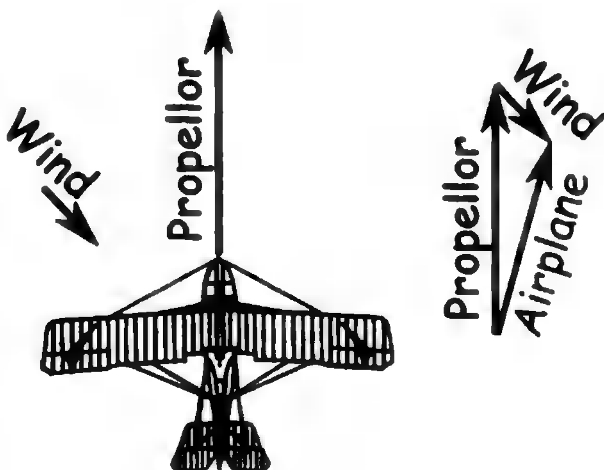
شـتێکی تـر لەم پرۆســە کە گـرنگە، ئەوەیە کە ئاراسـتەی چەمـاوەکە بە پـێچەوانەی میلـی کـاتژمێر بێـت. کەواتە خـاڵە سـەرنج ڕاکێشـەکە ئەمەیە: پەیوەنـــدی نێـــوان 'ڕووەک و چەمـــاوەیەک' یەکـــدەخرێت بەهـــۆی تەواوکارییەوە لە نێوان دوو ڕەهەندی جیاواز n و n-1 .



بەشی حەوتەم

پوختەی ئاراستەبڕەکان

Introducing vectors

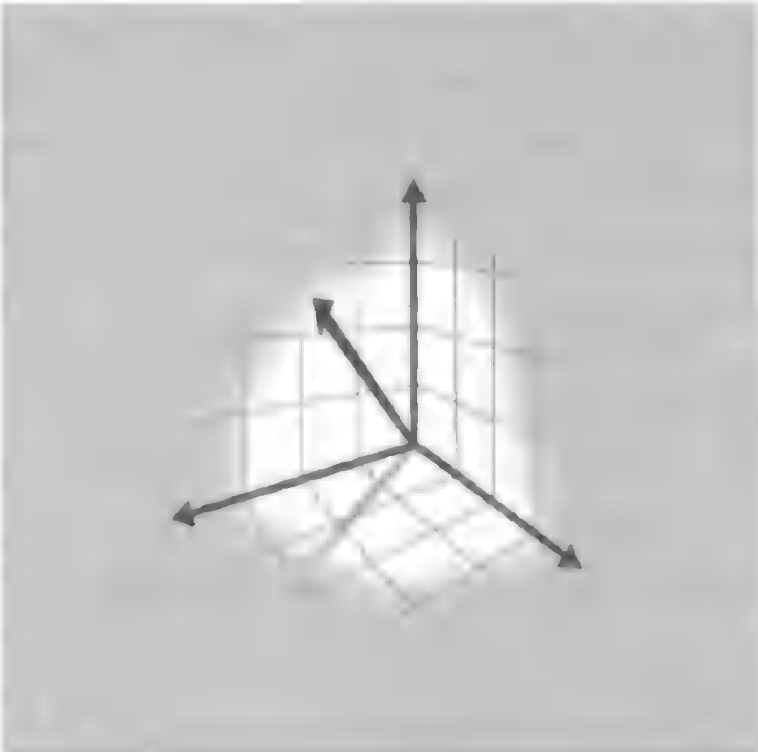


ئاراستەبڕەکان

Vectors

ئاراستەبڕەکان بەکاردەهێندرێت بۆ پیشاندان-نواندنی بڕێکی بیرکاریانە یاخود فیزیکیانە، کە بڕ-خێرایی، درێژ و ئاراستەی هەیە، وەک: با، کە خێرایی و ئاراستەی هەیە، وەک چۆن زۆر جار لەسەر نەخشە ئاماژەیەک بەکاردەهێندرێت بۆ پیشاندانی ئاراستەی با، کە چۆنە و بۆ کوێ دەچێت و، بە چ خێرایەک. ئاراستەبڕەکان بە شێوەی تیر (Ray) پیشاندەدرێت. سەری تیرەکە، خاڵی کۆتایی ئاراستەبڕەکە دەنوێنێت، درێژی تیرەکەش، ئەندازەی ئاراستەبڕەکەیە. بەلایەنی کەم خاڵی هاوبەشی نێوان بیرکاری و فیزیا، لە ئاراستەبڕەکانە. ئاراستەبڕەکان بەکارهێنانیان زۆرە، لە دروستکردنی یارییەکان، یان لە دروستکردنی ڕێگاوبانەکان و ئەوانەی پێشبڕکێی ئەنجامدەدەن بە بەلەمەکانیان لە ڕووبارەکان...، یان ئەگەر بێت و یەکێک چاوەڕێی تۆ بێت لە شوێنێک، تۆش کیلۆمەترێک لەو دوور بێت، ئەوە ئەو زانیارییە بەس نییە کە پێی بڵێ: وەرە لام من کیلۆمەترێک لەتۆوە دوورم! لیرە پێوستە زانیارییەکی تریشی پێ بدەی، ئەوش بە چ ئاراستەیەک ئەم کیلۆمەترە ببڕێت. ئاراستەبڕەکان ڕۆڵی سەرەکی دەگێرن لە ئەندازەدا، ئەندازە بەبێ ئاراستەبڕەکان زۆر ئالۆز و گران دەبوو، چونکە زۆرێک لە پرسە ئەندازییەکان هەر لە ڕێگەی ئاراستەبڕەکانەوە چارەسەریان بۆ دەدۆزرێتەوە، کە بوونی چەند ڕێگایەکی جیاواز بۆ گەیشتن بەو کێشەیە،

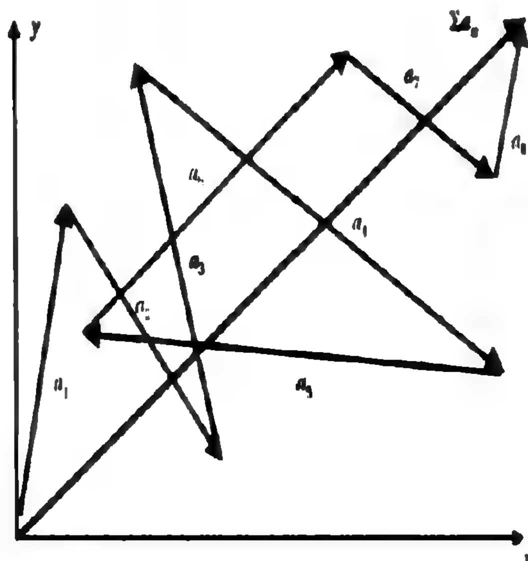
ئەوە تێگەیشتنی زیاترمان پێ دەدات لە هەمبەر پرسەکە. بە کۆمەڵەی ئاراستەبڕەکانیش دەوترێن شاهووتەی ئاراستەبرەکان (Vector space). کە تێیدا سەردەکێشنە زۆر لق و بواری بیرکاری، کە پانتاییەکی زۆر لە زانستەکانی تر داگیر دەکەن و سود بەخشن. دواییی دێن، لە ڕێگەی تەوەرەی پۆتانەوە باس لە ئاراستەبڕەکان دەکەین.



کۆکردنەوە و لێ دەرکردنی ئاراستەبڕەکان

Adding and subtracting vectors

دوو ئاراستەبڕ، کۆدەکرێنەوە بە شێوەیەک کە، کۆتایی ئاراستەبڕی یەکەم بنوسێت بە سەرەتای ئاراستەی بڕی دووەم، پاشان دروستکردنی ئاراستەبڕێکی نوێ لە خاڵی دەستپێکی ئاراستەبڕی یەکەم بۆ خاڵی کۆتایی ئاراستەبڕی دووەم، هەر وەک لە وێنەکە دا دیارە. ئەو ئاراستەبڕە نوێیەی لەوەوە دەستمان دەکەوێت، پێی دەوترێت: ئاراستەبڕی بەرئەنجام (Resultant vector). ئاراستەبڕەکان دەتواندرێت لەتەوەرەی پۆتان نیشانبدرێت و کردارەکانیان لەسەر جێ بەجێ بکرێت، واتە بۆ هەر جووتە ڕێکخراوێک (x,y) لە دووری خاڵی بنەڕەتەوە یان هەر خاڵێکی تر، ئاراستەبڕ دروست بکەین. بۆ دۆزینەوەی کۆی دوو ئاراستەبڕ، وا دانێ دوو ئاراستەبڕمان هەیە، ئەوانیش $(0,1)$ و $(1,0)$، پاشان دەتوانین ئەو دوو ئاراستەبڕە بەو شێوە: $(1,0) = (1 + 0 , 0 + 1)$ کۆبکرێتەوە. بۆ لێدەرکردنی دوو ئاراستەبڕ هەر هەمان شێواز. ئەگەر هەر هەمان ئاراستەبڕانە لە یەکتر دەربکەین: $(1 - 0, 0 - 1) = (1, - 1)$. لەبەر ئەوەی هەر یەک لە y و x لایەکانی سێگۆشەی گۆشە وەستاو دەنوێنن، ئەوە بەهۆی بیردۆزی فیساگۆرس دەتوانین بڕەکەیان یا مەودایەکەیان (Modulus) بدۆزینەوە، بۆ نمونە مەودای ئاراستەبڕی $(1,1)$ دەکاتە: $\sqrt{(1^2) + (1^2)} = \sqrt{2}$.



هەمـــــوو ئەو ڕێچکـــــانەی کە لە وێـــــنەکەدا هەیە، دەتوانـــــدرێت ســـــادەبکرێتەوە بەهـــۆی کـــۆکردنەوەی گشـــت ئەو ئاراســـتەبڕانە بـــۆ یەک ئاراســـتەبڕ، بـــۆ کـــۆکردنەوەی گشـــت ئەمـــانەش هێمـــای ســـیگما ($\sum$) بەکاردێنین، کە هێمایەکی گریکییە.

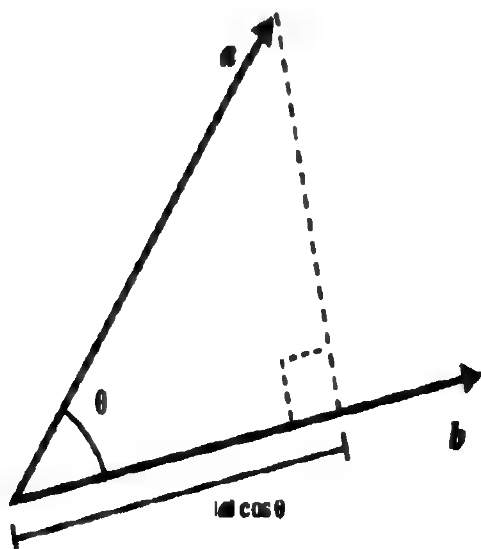
به برلێكدان

Scalar product

لەسەر ئاراستەبڕەكان، چەندین كردارمان هەنە، یەكێكی تر لە كرداركان بریتییە لە: بە بڕلێكدانی ئاراستەبڕەكان. كە بەكاردێت بۆ دروستكردنی ئاراستە بڕێكی نوێ. بەڵام ئەوەی لێرە جیاوازە، ئەوەیە كە ئەو ئاراستەبڕەی بە برلێكدان دەستمان دەكەوێت، هەڵگری ئاراستەی هیچ یەك لە ئەو ئاراستەبڕانە نییە كە ئەو ئاراستەبڕە نوێیان دروست كردووە، لە یەك بار ئەم شتە ڕوودەدات، ئەگەر بێت و هەردوو ئاراستەبڕەكە یەكسان بن، ئەوە بەبڕلێكدانیشیان هەر یەكسان دەبێت، بەڵام ئەمە بارێكی جێگای سەرنج نییە بۆیە باسی ناكەین. وا دانێ دوو ئاراستەبڕمان هەیە، ئەوانیش: $(1,3)$ و$(1,2)$ بە برلێكدانی ئەم دوانە دەكاتە:

$7 = (2 \times 3) + (1 \times 1)$. ئەگەر بێت و دوو ئاراستەبڕەكە لەسەر یەك ئەستوون بن، ئەوە كۆسایینی گۆشەی نێوان ئەو دوو ئاراستەبڕە دەكاتە سفر، هەر بۆیە بە برلێكدانی دوو ئاراستەبڕی لەسەر یەك ئەستون دەكاتە سفر. بابەتی بە برلێكدانی لە بواری فیزیا گرنگییەكی زۆری هەیە، وەك لێشاوی موگناتیس، لە ڕێگەی بە برلكیدانی ئاراستەبڕاكانی، لێكدانەوی بۆ دەكرێت و تێیان دەگەین. ئەگەر بێت و یەكێك لە ئاراستەبڕەكان یەكی (unit vector) بێت و مەوداكەی (Modulus) بكاتە یەك (1)، ئەوە ڕاستەوخۆ بە برلێكدانی ئاراستەبڕێكی

تــر بەم ئاراســتەبڕە، بەرئەنجــامەکەی دەکــاتەوە پێکهــاتەی ئاراســتەبڕەکەی تر، وەک: بە بڕلێکدانی $(0،1)$ و$(2،3)$ کە دەکاتەوە 3 .



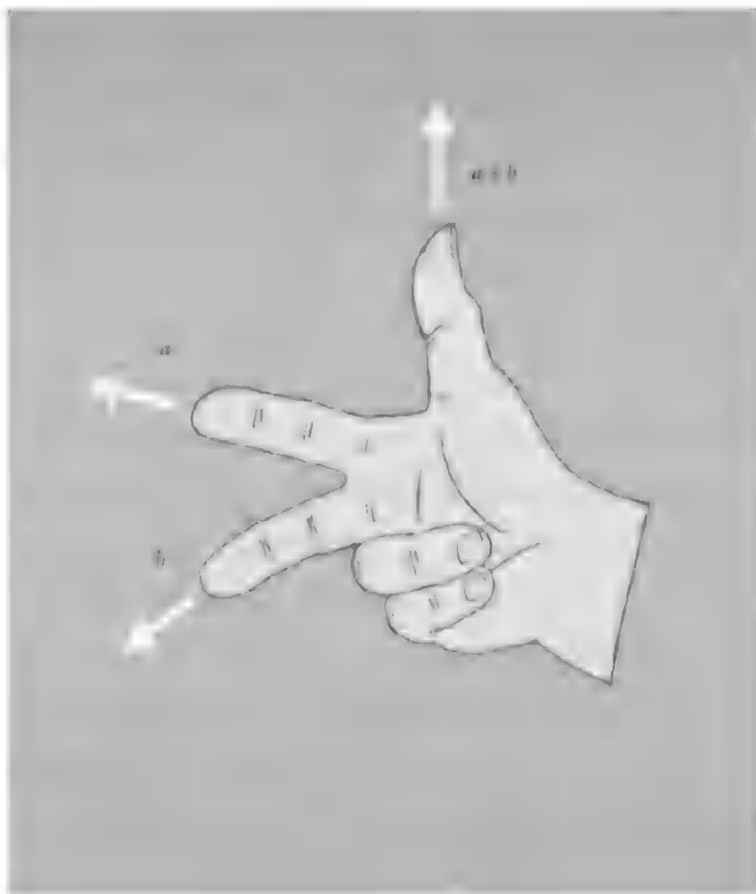
لەم وێــــنەی ســــەرەوە، $|a|\cos\theta$ بــــریتییە لە دەرهـــــاویژی a بەرەو ئاراســـتەی b، بــۆیە بە بڕلێکــدانی ئەم دووانە: $|a||b|\cos\theta$ دەکــاتە بە بڕلێکدانی مەودای ئاراستەبڕی b و دەرهاویژی a بەرەو b.

لێکدانی ئاراستەبڕەکان

Cross product

لێکدانی ئاراستەبڕەکان، یەکێکی ترە لە کردارەکان لەسەر ئاراستەبڕەکان. لێکدانی ئاراستەبڕەکان بەو شێوە ئاماژەی پێ دەکرێت: $a \times b$، کە ڕێگایەکە بۆ لێکدانی دوو ئاراستەبڕ لە بۆشاییەکی سێ ڕەهەندی، کە ئەو ئەنجامەی یاخود ئەو ئاراستەبڕەی لەو لێکدانە دەستمان دەکەوێت، ئەستوون دەبێت لەسەر هەردوو ئەو ئاراستەبڕانەی کە لێکمان دوان. لە فیزیا، لێکدانی ئاراستەبڕەکان گرنگە بۆ تێگەیشتن لە پەیوەندی نێوان هێز و درێژی، واتە ئەو درێژییەی دەکەوێتە نێوان شوێنی خولانەوە و ئەو شوێنەی هێزەکەی دەخرێتە سەری، وەک دەرگا، شوێنی هێزکە بریتییە لە کیلۆن-یەدە، واتە دەسکی دەرگاکە، شوێنی خولانەوەی دەرگاکە کە بریتییە لە نەرمادەکە-شێونی خولانەوەکە ، دیارە هەتا هێزەکە لە خاڵی خولانەوەکە دوورتر بێت، ئەوە جولاندنی دەرگاکە بۆ ژوورەوە یان بۆ دەرەوە ئاسانتر دەبێت. بۆ گوزارشتکردن لەو بەرئەنجامە نوییەی لە لێکدانی ئاراستەبڕ دەستمان کەوتووە، شتێکمان هەیە وەک یاسایەک بۆ وەسفکردنی ئەو لێکدانە، ئەویش پێی دەوترێت "یاسای دەستی ڕاست"، کە لە وێنەکە پیشادراوە. پەنجەی یەکەم ئاماژەیە بۆ ئاراستەبڕی a ، پەنجەی دووەم ئاماژەیە بۆ ئاراستەبڕی b، لێکدانی ئەو دوو ئاراستەبڕەش بە پەنجە گەورەکە دەنوێندرێت. سوودی ئەم یاسایەش بۆ ئەوەیە ئاراستەی هەر یەک لە مانە $b \times a$ و $a \times b$ بزانین،

بــۆیە لەم پرۆســـەی لێکــدانی ئاراســـتەبڕەکان تایبەتمەنـــدی ئـــالوگۆڕی لەبەرچـــاو دەگیرێــت، واتە ئەم لێکــدانە، وەک لێکــدانی ئاســـایی، ســـیفەتی ئالوگۆڕی نییە.

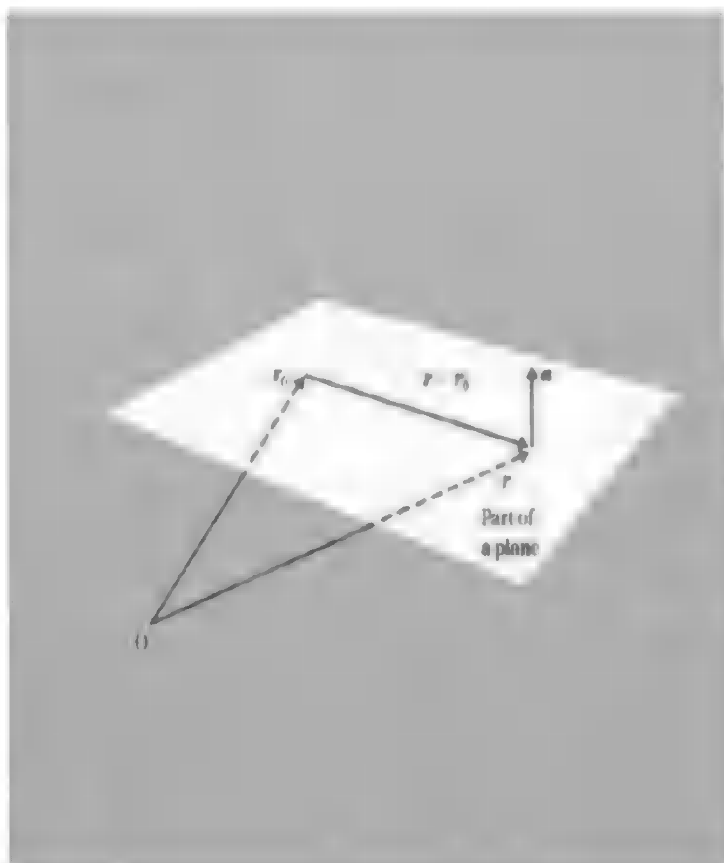


ئەندازەی ئاراستەبڕ

Vector geometry

ئەنـــدازەی ئاراســـتەبڕەکان، وەســـفی بەکارهێنـــانی ئاراســـتەبڕەکان دەکـات لە میـانەی چارەسـەرکردنی کێشـە ئەنـدازەییەکان. بەشـێکی زۆری بیرۆکەکـــانی ئەنـــدازە ئاســـانکراوەتەوە لە ڕێـــگەی ئاراســـتەبڕەکانەوە، بەتـایبەت کاتێـک ئـیش لەگەڵ ئـاهووتە سـێ ڕەهەنـدی یـاخود فـرە ڕەهەنـدەکان دەکەیـن. ئەگەر بێـت و شـوێنی خاڵێـک لە ئـاهووتەی سـێ ڕەهەنـدی بە شـێوەی ئاراسـتەبڕ نیشـاندرا $r = (x,y,z)$ کە پێـی دەوترێـت پـێگەی ئاراسـتەبڕەکە، لە پاشـان بۆشـایی دوو ڕەهەنـدی تەوەرەی پۆتـان لە خاڵێـک، لەگەڵ شـوێنی- پـێگەی ئاراسـتەبڕێکی ئەرێنـی r_0 ، فەراهەمـدێنێت بەهـۆی شـیکاری $a.(r - r_o) = 0$ ، کاتێـک aبـرتییە لە ئاراسـتە بڕێـک کە ئەسـتونە لەگەڵ ڕووتەخـت، وەک لە وێـنەکە ڕوونکـراوەتەوە. ئەگەر بێـت و ئـێمە سـێ هاوکێشـە بـۆ تەورەکـان بنووسـین بە بەکارهێنـانی ئەو فۆرمـولەی سـەرەوە، ئەوە مەرجـی یەکتربڕینـی هەرسـێ هاوکێشـەکە بـریتییە لە هەبـوونی سـێ هاوکێشـەی هاوتـا. ئامـانجی ئەوکـارەش ئەوەیە کە ئاسـانتر دەردەکەوێـت بـۆ ئەنـدازە، واتە تێگەیشـتن لە ڕێـگەی ئەنـدازەوە ئاسـانترە، بەڵام شـیکار و کـارکردن لەم ڕێـگەیە ڕۆشـنترە، چـونکە لەم بـارەدا، ئەم سـێ هاوکێشـەیە: شـیکارێکی بـێ هاوتـای-تاقـانە دەبێـت، یـان هـیچ شـیکارێکی نابێـت، وە یـاخود ناکۆتـا شـیکاری دەبێـت. بەڵام لەم دۆخە یـا شـیکارێکی بـێ هاوتـای دەبێـت، یـانیش هـیچ شـیکارێکی نابێـت. ئەگەر بێـت و هەرسـێ

ڕووتەخـــتەکە وەک یەک بـــن، ئەوە ناکۆتـــا شـــیکاری دەبێـــت، یـــان هـــیچ شـــیکارێکی نابێـــت ئەگەر بێـــت و بەلایەنـــی کەم دوو لەو ڕووتەختـــانە هاوتەریب و یەکسان نەبن.



نەخشە ئاراستەبڕەکان

Vector functions

ئاراستەبڕەکان کە پارچەکانی-پێکهێنەرەکانی نەخشەن، وەسفی ئەو پەیوەندییەمان بۆ دەکەن کە لە نێوان دوو یان زیاتر لە دوو گۆڕاودا هەیە، ئەوانیش نەخشەی ئاراستەبڕەکانن کە مەوداکانیان ئاراستەبڕە. بۆ ئەوەی سەر لەو پەیوەندییە دەربکەین، ئەوەیە کە پێکهێنەرەکانی دەتواندرێت داتاشراوە و تەواوکارییان بۆ وەرگیرێت وەک نەخشە ئاساییەکان. جیاکاری خۆشی دەکرێت لە رێگەی ئۆپەرەیتەری ئاراستەبڕەکان گوزارشتی لێ بکرێت. ئەگەر $f(x,y)$ نەخشەیەکی راستی بێت لە رووتەخت، ئەوە لاری (Gradient) نەخشەی f پێناس کراوە لە رێگەی نەخشەی ئاراستەبڕی $\left(\frac{\sigma f}{\sigma x},\frac{\sigma f}{\sigma y}\right)$، کە بەم شێوەش دەنووسرێت Δf ئاراستە و بڕی ئەم ئاراستەبڕە، شتێکمان بۆ دەخاتە روو، ئەویش ئاراستەی گەورەترین رێژەی زیادبوون-زیادکردن لە نەخشەی f و رێژەی زیادبوونەکەش. ئەم ئیش گۆڕکێیە (operator) ∇ پێی دەوترێت دیل (del)، کە چەندی تایبەتمەندی جوانی هەیە. دوو لە تەواوکارییە پەیوەندارەکان بەو دیلە لە وێنەکە خراوەتە روو.نمونەیەک لە هەمبەر ئەو بابەتە، گۆڕانی خێراییەک لە دەرەوەی سنوری رووێک، یەکسانە بە نەخشە ئاراستەبڕە بڵاوبووەکە لە ناو رووەکە. ئەمەش روونی دەکاتەوە کەچی روودەدات ئەگەر بێت و تایەک پڕ بکرێت لە هەوا: لەبەر ئەوەی رێژە و تەوژمی هەوا لە دەرەوەی تایەکە نەرێنییە، ئەوە

کشان و فراونبوونی هەوایەکە لە ناو تایەکە دیسانەوە نەرێنییە، بە واتایەکی تر، پەستێنراوە.

ڕەهەندەکان و سەربەخۆیی بەهێڵ

Dimensions and linear independent

کاتێک لە بارەی شێوەی تەنێک یان هەر شتێک دەدوێین، ئەوە لە ڕووی قەبارەیەکەوە دەدوێین، ئایا چەند دووری هەیە، نەک هەر بۆ شتەکان، تەنانەت بۆ ئاهووتەش (Space). بۆ نموونە ئەو بۆشایەی لە بابەتێکی ماتماتیک کاری لەسەر دەکەین ڕەهەندی هەیە، ئەگەر هەیەتی چەند ڕەهەندە؟ لە ئەندازەی ئیقلیدی و لە ئاهووتە ئاساییەکەی ، بازنە، یەک ڕەهەندییە؛ دیسک-پۆپکە، دوو ڕەهەندییە؛ گۆ، سێ ڕەهەندییە. جیاوازی نێوان بازنە و دیسک ئەوەیە کە بازنە چەقێکی هەیە تەنیا بۆخۆی و زیاتر نا، بەڵام لە دیسک چەقێکمان هەیە کە دەبێتە چەق بۆ ناکۆتا بازنەی تر. بۆیە لە دوو ڕەهەندی و سێ ڕەهەندی، لەوە تێدەگەین کە چەند ئاراستەیەکمان هەیە، سەرەوە، خوارەوە، تەنشتەکان: واتە درێژی و پانی و بەرزی. ئەمەش باسی لێوەکراوە بە شێوەیەکی بیرکارییانە بە بەکارهێنانی بیرۆکەی سەربەخۆ. کۆمەڵەیەک لە ئاراستەبرەکان پێیان دەوترێت سەربەخۆی بەهێڵ، ئەگەر بێت و هیچ یەک لە ئاراستەبرەکانی کۆمەڵەکە، نەتواندرێت لە کۆی دوو ئاراستەبری ناو کۆمەڵەکە بنووسرێت. واتە ئەگەر دوو ئاراستەبر لە کۆمەڵەکە کۆبکەینەوە، ئەوە نابێت ئەو بەرئەنجامەی دەستمان دەکەوێت لە ناو کۆمەڵەکە بێت. هەر کۆمەڵەیەک لە n ئاراستەبری سەربەخۆی بەهێڵ، پێی دەوترێن بنچە (basis) بۆ ئاهووتەیەکی n ڕەهەندی. هەر ئاراستەبرێک لەو ئاهووتەیە ، دەتواندرێت

بە شێوەی پێکهاتەی هێڵی بنووسرێت لە بنچەی-Base ئاراستەبرەکان. لە ئاهووتەی سێ ڕەهەندیدا، بنچەی-Base ئاهووتەی دیکارتی بریتییە لە سێ ئاراستەبر، ئەوانیش: (0,0,1)وە(0,1,0)،(1,0,0) کە ئەمانەش تایبەتمەندییەکی ناوازەیان هەیە، کە هەریەکەیان ئەستون دەبێت لەسەر ئەوی تریان. بەڵام هەر سێ لەئاراستەبری سەربەخۆی بەهێل، شیاوەی ئەوەن کە ببنە بنچە بۆ ئاهووتەی سێ ڕەهەندی.

ئاراستەبری a دەتواندرێت بەهۆی پێکهێنەری هێڵی (Linear combination) بنووسرێت لە بنچە ئاراستەبرەکانی i،j و k بەم شێوە: $a = a_x i + a_y j + a_z k$ (بە وردی سەیری وێنەکە بکە).

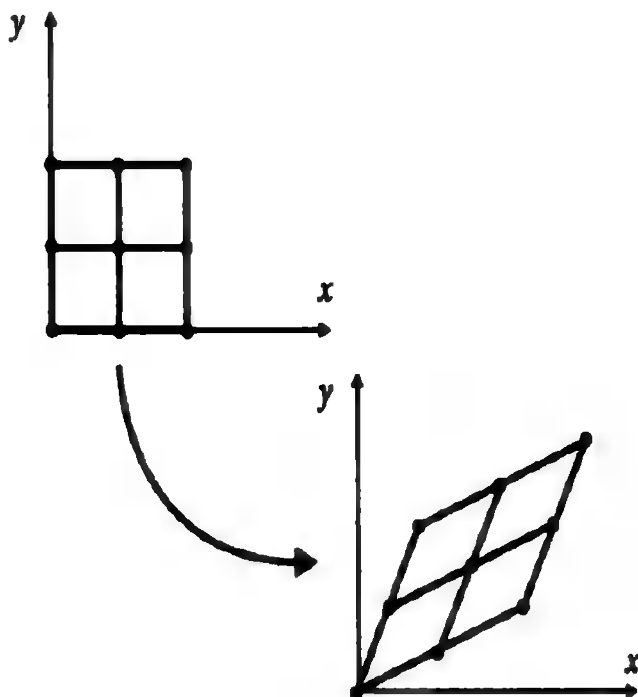
جێگۆڕکێیە هێڵییەکان

Linear transformation

جێگــــۆڕکێی هێڵییەکــــان، بــــریتییە لە نەخشــــەیەک، کە هەڵدەســــتێت بە گــــۆڕینی ئاراســــتەبڕێک بــــۆ ئاراســــتەبڕێکی تــــر، ئەویــــش لە ژێــــر ڕۆشــــنایی یاســــاکانی پێکهێــــنەری هێڵــــی (Linear combination). ئەگەر دوو ئاراســـتەبڕمان هەبێـــت و کۆیـــان بکەیـــنەوە، پاشـــان جێگـــۆڕکێ بەو ئەنجـــامە بکەیـــن کە دەســـتمان کەوتـــووە، ئەوە دەبێـــت هەمـــان بەرئەنجـــامی هەبێـــت ئەگەر بێـــت و، پـــێش کـــۆکردنەوەی ئەو دوو ئاراســـتەبڕە هەر یەکەیـــان بە جیا جێگۆڕکێیان پێ بکەین، پاشان کۆیان بکەینەوە.

ئەگەر a و b دوو ژمـــارە بـــن، وە u و v دوو ئاراســـتەبڕ بـــن، ئەوە جێگۆڕکێی هێڵی L دەبێت لەسەر ئەم یاسایە جێ بەجێ بێت:

$L(au + bv) = a(Lu) + b(Lv)$. جێگـــــــــۆڕکێ هێڵییەکـــــــــان لێکـــدانەوەی ئەنـــدازەییان هەیە کە ســـیفەتی کشـــان و ســـوڕاندن (rotation) دەگـــرنە خۆیـــان. هەر بـــۆیە زمـــانی جێگـــۆڕکێیە هێڵییەکـــان، توانـــای چـــۆنییەتی تەفســـیرکردنی کـــرداره ئاســـاییە ئەنـــدازەییەکانمان پـــێ دەدات. تەنـــانەت ئەمە لە کالکیلەســـیش دەردەکەوێـــت، لە ڕاســـتیدا داتاشـــراوەکان زیـــاتر نـــین لە جێگـــۆڕکێیە هێڵییەکـــان لەســـەر نەخشـــەکان، بـــۆیە لێکـــۆڵینەوە و کـــارکردن لەگەڵ جێگـــۆڕکێیە هێڵییەکـــان، یەکگـــرتنێکە لە دوو لاوە، ئەوانـــیش ئەنـــدازە و کالیکلەس.



کـرداره ئەنـدازەییەکان لەســەر شــێوەکان، دەکرێــت بەهــۆی جێگــۆڕکێی هێڵی وەسفبکرێن، وەک ئەم شێوەی سەرەوە.

ڕیزکراوەکان

Matrices

ڕیزکراوەکــان، بــریتین لە کــۆمەڵەیەک لە ڕێــز و ســتوون، ئەو ڕیــز و ســتونانە بە شــێوەیەکی ڕێــک دانــراون. هەر یەک لەو ڕیــز و ستونـــــانە ژمــارە دەگــرنە خۆیــان. ڕێزکراوەکــان لە نــاو کەوانەیەک دەنوســرێت، وەک: $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ یــان $\begin{pmatrix} a & b & a \\ c & a & c \end{pmatrix}$. ئەمــانە ســود گەلێکیــان هەیە لە زۆر بــواردا، بەتــایبەتی کــاتێ دەمــانەوێ کــاریگەری جێگــۆڕکێیەکی هێڵــی بــزانین. ئەگەر بێــت و جــووتە ڕێکخراوێکمــان هەبێــت (x,y)، ئەوە جێگــۆڕکێی هێڵــی بە شــێوەیەکی گشــتی ئەو شــێوەیە وەردەگرێــت: $(ax + by , cx + dy)$، ئەم پرۆســـەیەش ناســـراوە بە لێکــدانی ڕێزاکــراو. ئەو شــێوەیەی نوســیومانە، دەتـــوانین بە Mr دەری ببـــڕین. کاتێـــک M بـــریتییە لە ڕیزکـــراوەکە: $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ، و r بـــــریتییە لە شـــــوێنی ئاراســـــتەبرەکە (x,y)، کـــاری ڕیزکـــراوەکە لێـرە بـــریتییە لە نوانــدنی جــوڵەی جێگــۆڕکێیە هێڵیــیەکە. ئەو ڕێزکــراوەی ســـەرەوە دوو بە دووە، واتە: 2×2، دەکرێـــت بـــۆ $n \times n$ ڕیزکـراو دروســت بکەیـن، ئەو دوو ژمـارەیە دەبێـت لە یەک گەورەتـر بێـت و لە ژمــارە سروشــتییەکان بێــت، چــونکە یەکێکیــان ئامــاژەیە بــۆ ژمــارەی ڕێزەکــان، ئەوەی تـر ئامـاژەیە بـۆ ژمـارەی سـتونەکان. ڕێزکراوێـک هەیە پێـی دەوتـــرێن ڕیزکـــراوی بـــێ لایەن (identity matrix)، وەک چـــۆن لە کــۆکردنەوەی ئاســـایی 0 دانەی بـــێ لایەنە، بەو شــێوەش لە ڕیزکراوەکــان، ڕیزکــراوی بــێ لایەنمــان هەیە و بە I هێمــا دەکرێــت، ئەو ڕیزکــراوە تیــرە

سەرەکییەکەی (Diagonal) گشتی بریتییە لە ژمارە یەک (1) و دانەکانی تری گشتیان بریتین لە (0)، سەیری ئەو نموونەیە بکە: $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ واتە هەر ڕیزکراویک جارانی ئەو ڕیزکراوەی بکەین، ئەوە دەکاتەوە ڕیزکراوەکە خۆی، وەک چۆن3 جارانی 1 هەر دەکاتەوە 3. هەر دانەیەکی (Entry) ناو ڕیزکراو ناونیشانێکی (Adress) هەیە، کە شوێنەکەی لە ناو ڕیزکراوەکە نیشاندەدات. سەرەڕای ئەمەش، ڕیزکراوەکان ڕەهەندییان هەیە. ئەو نموونەی سەرەوە ڕیزکراوێکی 3 × 3 ، کە سێ بە سێ دەخوێندرێتەوە. ڕیزکراوەکان بۆ تواندنی شت وەک-کەل وپەل بەکاردێت و، لەگەڵ بەرواری بەسەرچوونی ئەو شتانە... هتد.



شیکارکردنی هاوکێشەی ڕیزکراوەکان

Solving matrix equations

هاوکێشـــەی ڕیزکــراوە، هاوکێشـــەیەکی بیرکارییـــانەیە کە نەزانراوەکـــانی بـــریتین لە ڕیزکـــراوە. یەکێـــک لە ســـوودەکانی ئەم هاوکێشـــانەش هەر لە نـــاو پانتـــایی بیرکـــاری، بەکاردێـــت بـــۆ شـــیکارکردنی سیســـتمە هێڵییەکـــان و لێکۆڵینەوە لە مەڕ جێگۆڕکێیە هێڵییەکان.

وا دانـــێ کە Mr وەســـفی ئەو کـــاریگەرییە دەکـــات کە بەســـەر ئاراســـتەبڕێک r داهـــاتووە لە کـــاتی جێگـــۆڕکێی هێڵـــی، واتە پرۆســـەی جێگـــۆڕکێی هێڵیمـــان بەســـەر ئاراســـتەبڕی r ئەنجامـــداوە و Mr وەســـفی ئەو جێگـــۆڕکێیە دەکـــات کە چـــۆنە. دواتـــر لە ڕێـــگەی ئەو جێگـــۆڕکێیە هێڵیـــیە، دیســـانەوە ئاراســـتەبڕێکی تـــر دێـــتە کـــایەوە، ئەویـــش نـــاوی دەنـــێین b، لێـــرە دەمانەوێـــت ئەوە بـــدۆزینەوە کە ئەو r ی کە ئاراســـتەبڕێکە، چـــی بـــووە (چ شـــێوەیەکی هەبـــووە) کە ئەو جێگـــۆڕکێیە هێڵـــیەی بەســـەردا هـــاتووە، واتە شـــیکاری ئەو هاوکێشـــەیە $Mr = b$ واتە نـــرخ r چیـــیە؟ خـــوێنەری هێـــژا ڕەنـــگە بڵێـــت چـــۆن خۆمـــان لەو M دەربـــاز بکەیـــن؟ مـــومکینە بڵێـــی هەردوولای هاوکێشـــەکە لای دابەشـــی M دەکەیـــن! وەڵامێکـــی ژیـــرانەیە، بەلام هەڵەیە. ئـــێمە نـــاتوانین هەردوو لای هاوکێشـــەکە دابەشـــی M بکەیـــن، چـــونکە M بریتـــی نیـــیە لە تـــاقە ژمـــارەیەک، بەڵکـــو M بـــریتییە لە ڕیزکراوێـــک کە چەنـــد ڕیـــز و ســـتونێکی تێـــدایە لە ژمـــارە. ئـــێمە لە بیرکـــاری شـــتێکمان هەیە، ئەویـــــش، هەر شـــــتێک جـــــارانی هەڵـــــگەڕاوەکەی (Inversr) بکەیـــــن ،

ئەنجامەکەی دەکاتە دانەی بێ لایەن بە گوێرەی سیستەمەکە (ڕیزکراوەیە لێرە)، دانەی بێ لایەن لە کرداری جارانکردن، واتە $\frac{1}{2} \times 2 = 1$. لە ڕێزکراوە، دانەی بێ لایەن ئەمەیە: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ بۆ ڕیزکراوێکی سێ بە سێ. ئێستا بۆ ئەوەی شیکاری هاوکێشەکە بدۆزینەوە، دەبێت هەڵگەڕاوەی ڕیزکراوکە بدۆزینەوە، ئەگەر بوونی هەبێت!

هەڵگەڕاوەی هەر ڕیزکراوێک بەو شێوە دەردەبردرێت M^{-1} ، بۆیە، هەر دوو لای هاوکێشەکە جارانی هەڵگەڕاوەی ڕیزکراوی M دەکەین، بۆیە $M^{-1}Me = M^{-1}b$ و لەبەر ئەوەی $M^{-1}M = I$ ، بۆیە لەمەوە دەگەینە: $Ir = M^{-1}b$ پاشان لەبەر ئەوەی دانەی بێ لایەن؛ جارانی هەر بڕێک دەکاتەوە بڕەکە خۆی، واتە $Ir = r$ بۆیە شیکاری هاوکێشەکە واتە ڕیزکراوی r دەکاتە $r = M^{-1}b$. لێرە شتێک هەیە پێوستە بیزانین، ئەویش ئایا هەردەم هەڵگەڕاوەی ڕیزکراوەیەک بوونی هەیە، وە ئەگەر بوونی هەبێت چۆن چۆنی دەدۆزرێتەوە؟

دۆزینەوەی هەڵگەڕاوەی ڕیزکراوە تا گەورەتر بێت، تۆزێک گرانتر دەبێت و تەکنیکی تری ئەوێت، بۆیە لێرە لەسەر نموونەیەکی (دوو بە دوو) باسی لێ وە دەکەین. وادانێ ئەو ڕیزکراوەمان هەیە بە شێوەیەکی گشتی $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ بۆیە هەڵگەڕاوەی ئەو ڕیزکراوەیە بە شێوەیەکی گشتی دەکاتە: $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ بەو مەرجەی کە $ad - bc \neq 0$. ئەگەر بیر لە ڕۆتانی ئەو هاوکێشەیە بکەینەوە، ئەوە لە ڕاستیدا بریتییە لە

کۆمەڵێک هاوکێشەی هێڵی پێکەوە پەیوەست، واتە سیستەمێکی هێڵی، بۆیە ئەسڵی بابەتەکە ئەوەیە کە، دۆزینەوەی شیکاری هاوبەشی سێ ڕووتەخت، هاوشێوەی شیکارکردنی سیستەمێکە کە سێ هاوکێشەی هێڵی پەیوەست بەیەکەوە بەهۆی توانادنی ئاراستەبرەکان لە ڕووتەختدا، هەروەها هاوشێوەیە لەگەڵ شیکارکردنی هاوکێشەی ڕیزکراوە.

هەڵگەڕاوەی ڕیزکراوە، ئەوەمان بۆ دەردەخات کە کاتێ ڕووتەخت وەک هێڵێک ڕەفتار دەکات لە بۆشایی دوو ڕەهەندی، ئەوە ئەو دوو ڕووەتەختە کە وەک هێڵ ڕەفتار دەکەن یەکتر دەبڕن، بۆیە لەم بارەدا؛ یەکتربڕینەکە تەنیا لەیەک خاڵە، واتە بێ هاوتایە و یەک شیکاری بوونی هەیە، ئەویش بە پشت بەستن بە $ad - bc$ ئەکاتە سفر. ئەگەر بێت و بکاتە سفر، ئەوە یان هیچ شیکارێکی نییە، وە یان ناکۆتا شیکاری هەیە. ئەو بڕە $ad - bc$: پێی دەوترێت سنوردەری ڕیزکراوەکە (Determinate of the matrix).

لە ڕەهەندی زیاتر، واتە پتر لە دوو ڕەهەند، پرۆسەکە تۆزێک ئاڵۆز دەبێت، بەڵام شێوازی و تەکنیکی جیاواز هەن بۆ ئەوەی لەوانیش تێبگەین و لێکۆڵینەوە ئەنجام بدەین.

ئاموتە پوچەکان

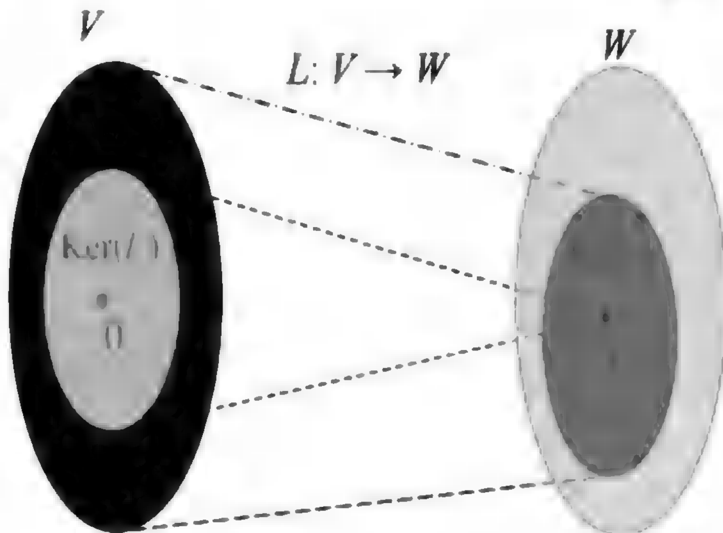
Null spaces

ئـاموتەی پـوچ یـان کێرنەڵـی (kernal)ی ڕیزکراوەشـی پـێ دەڵـێن.
ئـــاموتەی پـــوچ، بـــریتییە لە کـــۆمەڵەی هەمـــوو ئەو ئاراســـتەبرانەی کە نەخشـــەکەی (mapping) دەچێـــت بـــۆ ئاراســـتەبرێکی ســـفری (zero vector) بەهـــۆی جێگـــۆڕکێی هێڵیـــیەوە (linear transformation).
ئەگەربێــت و M ڕیزکراوێــک بێــت، کاتێــک Mr وەســفی ئەو کــاریگەرییەی جێگـۆڕکێیە هێڵیـیە دەکـات لەسـەر ئاراسـتەبرێک r هاتبێـت، ئیسـتا ئـاموتەی پـوچ N بـریتییە لە کـۆمەڵەی هەمـوو ئەو خـالآنەی کە دەبێـتە هـۆی ئەوەی Mr=0. وە ڕەهەنـدی ئەو ئـاموتە پـووچە، پێـی دەوتـرێن: ڕادەی پـوچێتی (Nullity).

بـۆ زانینـی ڕەهەنـدی یـان قەبـارەی ئەو ئاراسـتەبرەی کە جێگـۆڕکێی هێڵی پێکـراوە، پێوسـتە سـەرنجی ئـاموتەی وێـنە بـدەین (image space)، کە بە بیرکاریـــانە بە $Im(M)$ ئامـــاژەی پـــێ دەکرێـــت. ئـــاموتەی وێـــنە، بـریتییە لە کـۆمەڵەی هەمـوو ئەو خـالآنەb کە $Mr = b$ بـۆ ئەو نرخـانەی r کە b بەرهەم دێنێـت. ڕەهەنـدی ئـاموتەی وێنەیـی، پێـی دەوترێـت: پـلە-پـــایە (Rank). ئەگەر بێـــت و $Mr = b$ یەک شـــیکاری هەبێـــت بەگـــوێرەی دراوی b ، ئەوە ئـــاموتەک لە شـــیکار هەیە، کە دەکـــاتە ڕەهەنـــدی N، کە وتمـــان N بـــریتییە لە کـــۆمەڵەی هەمـــوو ئە خـــالآنەی کە $Mr = 0$.
نامانەوێـت زیـاتر بەو شـێوە وشـکە لەسـەر بـابەتەکە بەردەوام بـین، بـۆیە

ئەوەی لەسەرەوە نووسراوە پوختەی ئاهووتە پوچەکانە. بە نموونەیەکی ژیانی ڕۆژانە بیرۆکەکە شیدەکەینەوە. وا دانێ شەریکەیەک-کارگە کە بنێشتی ناو قتوو بەرهەم دێنێت، پێش ئەوەی ئەو قوتووە بنێشتانە بکرێتە پاکەتەوە و بنێردرێتە بازاڕ، پشکنینێکی بۆ دەکرێت لە لایەن دەزگایەکەوە، بۆ ئەوەی بزانرێت ئەو قوتووە بەتاڵە یان نا، ئەگەر بەتاڵ بێت ئەوە لایدەدات بۆ لایەک. لێرە قووتووە بنێشەکان ئاراستەبرەکانن، دەزگایەکە بۆ جیاکردنەوەی قوتووە بەتاڵەکان جێگۆڕکێیە هێڵییەکەیە. قوتووە بەتاڵەکان دەخرێنە ناو شوێنێکی تایبەت، ئەو شوێنە تایبەتە کە ئەو قوتووە بەتالانەی تیدایە، پێی دەوترێت ئاهووتەی پوچ.

گەلێ لە کێشە بیرکارییەکان، وەک لە هاوکێشە جیاکارییەکان، دەکرێت بەهۆی ئەو زمانە بیرکارییەوە بنوێندرێت، وە لە پانتایی بیرکاری بە گشتی.



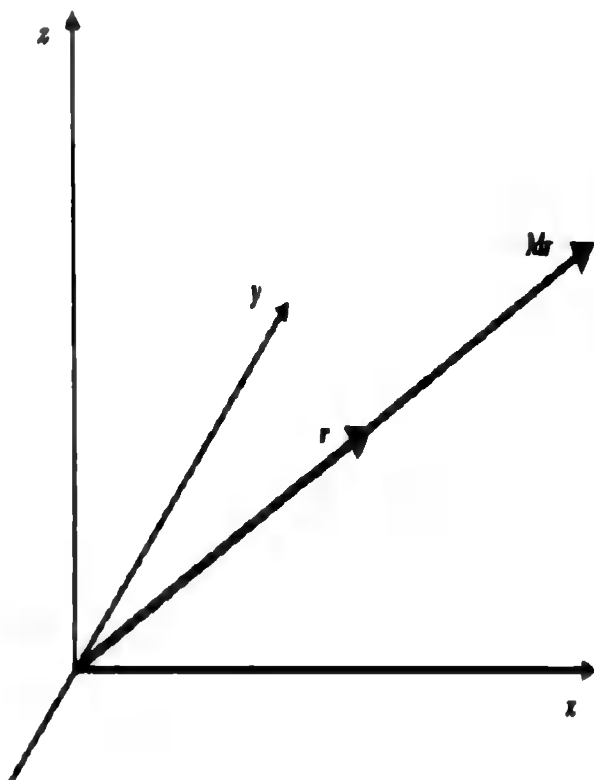
بەها تایبەتییەکان و ئاراستەبڕە تایبەتییەکان

Eigenvalues and eigenvectors

بەهــا تایبەتییەکــان و ئاراســتەبڕە تایبەتییەکــان، بــریتین لە کــۆمەڵەیەکی شــاز؛ لە بڕەکــان و ئاراســتەبڕەکان، ئەویــش بەهــۆی پەیوەنــدییەکەوە بە ڕیزکراوێــک. وشــەی Eigen لە زمــانی ئەڵمــانییەوە هــاتووە، کە بە مانــای ســەیر یــان تــایبەت دێــت. ئەگەر بێت و ڕیزکراوێکــی چوارگۆشــەیمان هەبێت، واتە $n \times n$ بێــت، نــاوی لــێ بنــێین M ، لەگەڵ بەهــاتی تــایبەتی λ هاوتــایە لەگەڵ ئاراســــتەبڕی تــــایبەتی r پاشــــان $Mr = \lambda r$. لە فیزیــــادا، ئاراســـتەبڕە تایبەتییەکـــان واتـــای ئەوەیە کە ئاراســـتەکانیان بە نەگـــۆڕی دەمێنێــتەوە بە هــۆی کــاریگەری ڕیزکــراوەکەوە M، وە λ وەســفی ئەوەمــان بــۆ دەکــات کە چــۆن دوورییەکــان دەگــۆڕێن لەو ئاراســتەی هەیەتــی لەگەڵ بەهای تایبەتە نەرێنییەکەی.

ئەگەر بێــــت و هەوڵ بــــدەین ئەم هاوکێشــــەیە شــــیکار بــــکەین $Mr = \lambda r$ ئەوە دەتــــوانین هاوکێشــــەکە بەو شــــێوە بنووســــینەوە $(M - \lambda I)r = 0$، دیــارە ئەم هاوکێشــەیە شــیکاری هەیە، تەنیــا ئەگەر بێــت و $(M - \lambda I)$ ئــاموتەیەکی پــوچی بەردەری هەبێت (Non Trivial null space)، ئەمەش واتــا ناکرێــت r لێــرە شــیکاری ئەو هاوکێشــەیە بێــت، واتە نرخــــی $r \neq 0$ ، ئەمەش واتــــا $M - \lambda I = 0$ بــــۆیە ســــنووردەری ڕیزکــراوەکە (determinante) کە n بە n ە ، لێــرە دەگەیــن بــۆ ڕادەدارێکــی پــلە n لە λ کێشــەی و پرســی نــرخە تایبەتییەکــان زۆر بــاون، لەبەر

ئەوەی ئەمـــانە زانیـــاری گرنگمـــان بـــۆ دەســـت دەخەن لە هەمـــبەر جێگـــۆڕکێیە هێلییەکان.

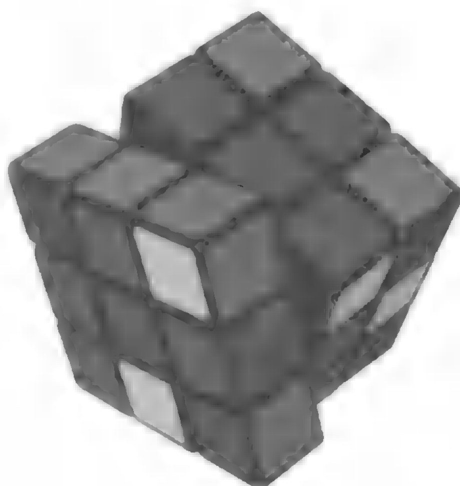


لەم وێـــنەیە باشـــتر لەو نووســـنەی ســـەرەوە تێـــدەگەین. ئاراســـتەبڕی r ئاراســـتەبڕێکی تـــایبەتە بـــۆ ڕێزکـــراوەی M ئەگەر ئەم دووانە، r و Mr ڕوو لە هەمان ئاراستە بن!

بەشی هەشتەم

جەبری پوخت- رووت

Abstract algebra

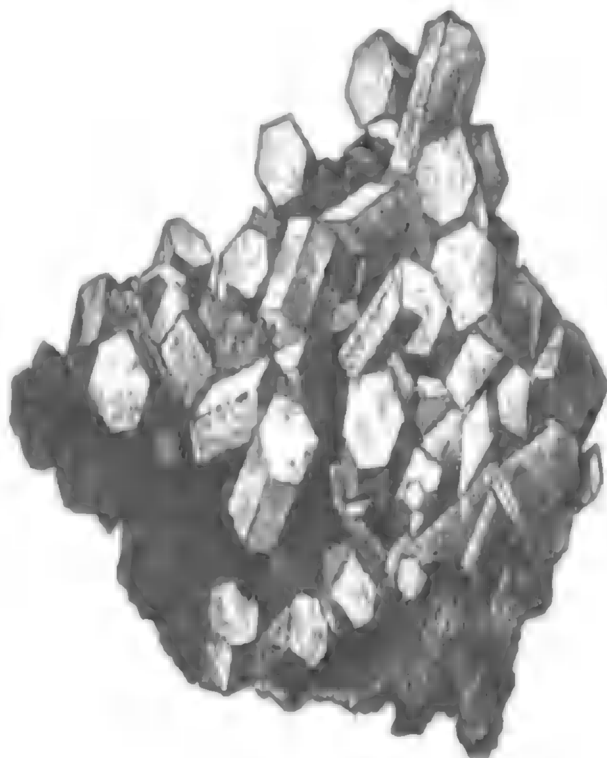


جەبری پوخت (پەتی)

Abstract algebra

جەبـری پوخـت-پەتـی، یەکـێکە لە لـقە هەرە سـەرەکییەکانی بیرکـاری. جەبـری پوخـت چەنـد پێکهاتەگەلێـک لەخـۆ دەگرێـت، وەکـو تیـۆری گـرووپ، تیـۆری ئەڵـقە، تیـۆری مەیـدان (Field)، وە ئـاهووتەی ئاراسـتەبڕەکان... ، کە تێـدا هەر یەکەیـان بەهـۆی چەنـد یاسـایەکی جیـاوازەوە دانەکـانی دەسـتە-کـۆمەڵەیەک پێکـدەهێنن لە ژێـر ڕۆشـنایی ئەو یاسـایانە کە پێـان دەڵـێن بەڵگەنەویسـت- ئەکـزۆم. دواتـر لەم سـۆنگەیەوە دەلکـێن بە کـۆمەڵەیەک. کـاری ئەو پێکاهاتـانەش هەمـووی کـردارە ئاسـاییەکانی وەک کـۆکردنەوە، کەمکـردنەوە، جـارانکردن_ دەگـرنە خۆیـان، لەگەڵ ژمارەکـان. وەک: ئـاهوتەی ئاراسـتەبڕەکان کە یەکـێکە لە پێکهاتەکـانی جەبـری پوخـت کە کـۆمەڵەیەک لە ئاراسـتەبڕ دەگـرێتەوە لەگەڵ یاسـا و تایبەتمەنـدییە پەیوەندیـدارەکانی نێوانیـان. ئەم یاسـایانەش وەسـفی چـۆنییەتی پێکهێنـانی ئەو شـتانە دەکەن لە میـانەی ڕەفتـاری بـابەتەکە، دواتـر دەکرێـت بخـرێتە نـاو چـارچێوەیەک وەک کـۆمەڵەیەک لە تایبەتمەنـدییەکانی ئەو شـتە. لە ئـاهووتەی ئاراسـتەبڕەکان، یاسـاکان وەسـفی کـۆکردنەوە و بە بڕلێکـدانی ئاراسـتەبڕەکان دەکەن. بە دوورکەوتـنەوە و بەلاوە نـانی گرنگـی و بەکارهێنانیـان لە ئـاهووتەی ڕاسـتی بەرە و کـۆمەڵەی جەبـری پەتـی تـر، واتە گرنگـی ئەوانە لە جیهـانی پەتـی، ئەوە دەبـنە سروشـتی ئەو ڕێگـایەی کە بیرکاریزانەکـان تێـدا بیرۆکەکانیـان گەشـە پـێ دەدەن و بەرەو پێشـیان

دەبەن. سەرباری رووتاندن و سنوردارکردنیان، پێکهاتە ناوازەکەیان ئەنجام و دەرئەنجامی گرنگی هەیە لە زۆر بواری تردا، بۆ نموونە لە پێکهێنانی توپۆلۆجی.



تیۆری گرووپ رۆڵێکی سەرەکی دەگێڕێت لە تێگەیشتن لە پێکهاتەی کریستاڵەکان.

تیۆری گرووپ

Group theory

گرووپ، بریتییە لە بونیادێکی بیرکاریانە، کە پێکدێت لە کۆمەڵەیەک (Set) لەگەڵ کردار-ئۆپەرەیشنێکی دووانی، کە دەکرێت ئەو ئۆپەرەیشنە (کردارە) وەکو کۆکردنەوە یاخود لێکدان سەیر بکرێت. بەلام بەشێوەیەکی گشتی کردارەکە بەم شێوە * هێما دەکرێت.

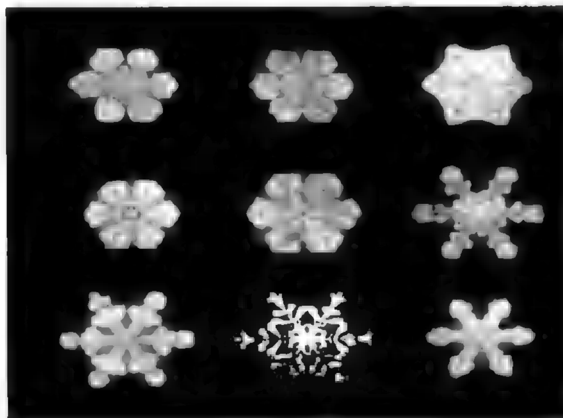
بۆ هەر کۆمەڵەیەکی وەکو G و هەر سێ دانەیەک لەم کۆمەڵەیە a،b،c ، مەرجە کە ئەم چوار بەڵگەنەویستەی خوارەوەی لێ بێتە جێ، بۆ ئەوەی پێی بوترێ گرووپ:

1) بەستراو (Closed): گەر هاتوو هەریەکە لە a،b لەناو G بن ئەوە دەبێت $a * b$ لەناو G بێت.
2) یەکتربەستن (Associativity): مەرجە کە: $a * (b * c) = (a * b) * c$.
3) دانەی بێ لایەن (Identity element): مەرجە کە دانەیەکی وەکو e هەبێت لەناو G دا کە $a * e = e * a = a$ بۆ هەموو دانەیەکی ناو G ، کە پێی دەوترێت: دانەی بێ لایەن.
4) هەڵگەڕاوە (Inverse): بۆ هەموو دانەیەکی وەکو a لەناو G مەرجە دانەیەکی تر هەبێت کە بە دژ ناوی دەبەین و بەم جۆرە هێمای دەکەین a^{-1} کە:

$$a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$$

سادەترین نموونە لەسەر گرووپ، بریتییە لە ژمارە تەواوەکان لەگەڵ کرداری کۆکردنەوە واتە $(\mathbb{Z},+)$. روونە دەبێت دانەی بێلایەن بکاتە سفر، چونکە تەنها سفرە لەگەڵ هەر ژمارەیەکی تردا کۆبیکەینەوە ئەنجام دەکاتە ژمارەکە خۆیی.

گرووپ گرنگی و جێبەجێکردنی زۆری هەیە، چونکە دەکرێت ئەم خاسیەت و بەڵگەنەویستانە وەکو خاسیەتی فیزیایی تەماشابکرێت، دەکرێت گرووپ لەسەر چەندلا (Polygon) پێناسە بکەین و دواتر تەوەرەکانی هاوجێبوون دەوری دانەکانی کۆمەڵەکە دەبینین، واتە ژمارەمان نیە لەم کۆمەڵەیە، بەڵکو کۆمەڵێک خاسیەتی فیزیایی (جیۆمەتری) مان هەیە، نموونەی تر کە دەکرێت سود لە بیرۆکەی گرووپ وەرگرین بۆ تێگەیشتن لێیان، وەک، کڵوە بەفر، ئەمانە هەموو کۆمەڵێک بونیادی فیزیاییین، کە دەکرێت وەکو نموونەی گرووپ تەماشا بکرێن.

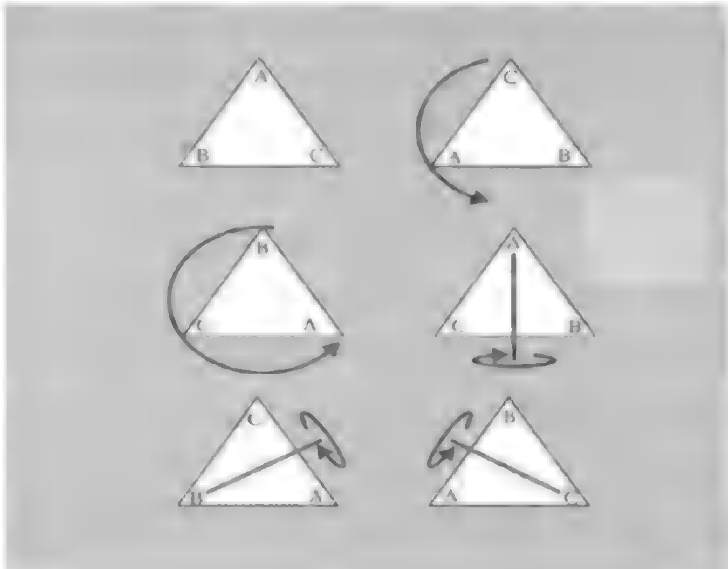


گرووپە هاوجێیەکان

Symmetry groups

وادانـــێ سێگۆشـــەیەکی ســـێ لا یەکســـانمان هەیە، ئەگەر بێـــت ئەو سێگۆشـــەیە بە ئاراســـتەی میلـــی کـــاتژمێر 120 پـــلە بیخـــولێنینەوە، ئەوە دەبنـــین هـــیچ شـــتێکی جیـــاواز ڕووی نەداوە، چـــونکە ســـەرەتا سێگۆشـــەکە چـــۆن دانربـــوو، دوای ئەوە کە بە 120 پـلە ســـوڕاندمان، هەر هەمـــان شـــێوەی ســـەرەتای وەردەگـــرێتەوە. یـــان کاتێـــک سێگۆشـــەکە ڕووی وەردەگێـــڕین، دەبینـــین دووبـــارە هـــیچ شـــتێک ناگۆڕێـــت. بـــۆیە گرووپـــی هـــاوجێ؛ ئەو گـــرووپەیە کە بە چەنـــد ڕێگـــایەکی جیـــاواز، نوانـــدنی هەیە لە ژێـــر جێگۆڕکێـــدا، کە هـــیچ جیـــاوازەییەکی نابێـــت لەگەڵ شـــێوە یـــان ســـیفەتە بنەڕەتیـــیەکەی، واتە دوای گـــۆڕان و پـــێش گـــۆڕان هەمـــان ســـیفەت و تایبەتمەنـــدی دەبێـــت بە بەراورد بە شـــێوە بنەڕەتیـــیەکەی. ئەگەر بێـــت وا دانـــێین a مەبەســـت لێـــی ســـوڕاندن بێـــت، وە b مەبەســـت لێـــی ڕوو وەرگێـــڕان بێـــت، ئەوە دەتـــوانین کـــرداری جـــارانکردن بەکـــاربێنین بـــۆ ئـــاوێتەکردنی ئەو دوو ســـیفەتە a و b. بـــۆیە ئەگەر بـــێلن a^2b، ئەوە مەبەســـتمانە بڵـــێین: سێگۆشـــەکە دوو جـــار بە گۆشـــەی 120 بیخـــولێنەوە و، جـــارێکیش ڕووی وەرگێـــڕە. لە ڕاســـتیدا 6 ڕێـــگەی جیـــاواز هەن بـــۆ بەرهەم هێنـــانی جێگـــۆڕکێ لە ڕووکـــاری ئەو شـــتەی هەمـــانە (وەک لە وێـــنەکەدا دیـــارە)، ئەوانـــیش e، a، a^2،b،ab وە a^2b بەدەر لەم ئەگەرانە، ئەگەر بیـــر لە شـــتی تـــربکەیتەوە، لە ئەنجامـــدا هەر شـــێوەیەی یەکێـــک لەمـــانەی ســـەرەوە وەردەگرێـــت و هاوتـــای ئەوانە دەبێـــت. مەبەســـت لە

e بــریتییە لە دانەی بــێ لایەن لەو گــرووپە، واتە ئەو سێگۆشــە ڕەســەنەی یەکەمجــار هەمــانە. ئەگەر بێت و ســەیر بکەیــن b^2 یان a^3 یەکســان دەبــن بە e ، واتە دانەی بێ لایەن.



لەم وێــنەی ســەرەوە، هەر6 دانەکەی؛ گرووپــی هــاوجێی سێگۆشــەی سێ لا یەکسان خراوەتە ڕوو بە شێوەی ئەندازەیی.

بنەگرووپەکان و بەرکەوتە گرووپەکان

Subgroups and quotient groups

بنە- بەشە گرووپ (Subgroup) بەشێکە لە گرووپ، واتە بەشە کۆمەڵەیە لە گرووپێکی تر کە هەموو مەرجەکانی گرووپ جێ بەجێ دەکات. لەبەر ئەوەی دانەی بێ لایەن{e} خۆی بەتەنیا دەبێتە گرووپ، بۆیە هەمیشە بۆ هەموو گرووپێک بەلایەنی کەم بنەگرووپێک هەیە، واتە هیچ گرووپێک نییە بنەگرووپێکی نەبێت.

لە بابەتی پێشوو باسی گرووپی هاوجێمان کرد لەسەر سێگۆشەی سێ لایەکسان، کە دانەکانی ناو گرووپەکە بریتین لە $\{e,a,a^2,b,ab,a^2b\}$ کاتێک a بریتییە لە سووڕاندن بە پلەی 120 وە b بریتییە لە وەرگێرانی ڕوو. بۆیە ئەم گرووپە، دوو بنەگرووپی بەردەری[81] (Non-trivial) هەیە، ئەوانیش $\{e,a,a^2\}$ کە سووڕاندنە، $\{e,b\}$ کە ڕوو وەرگێرانە. هەر یەک لەم دوو بنەگرووپە، پێیان دەوترێن گرووپی بەپات-خولی(دەوری)، کە هەمیشە لەبنەگرووپەکان، دانەی بێ لایەنی تێدایە {e}، چونکە بێ دانەی بێ لایەن، گرووپ و بنەگرووپ دروست نابێت.

[81] دۆزینەوەی وشەیەکی گونجاو بۆ ئەم چەمکە زۆر هیلاکی کردم. وشەی 'بەردەر و بێ بەر' زۆر بەکاردێت لە زمانی کوردیدا، بەتایبەت لە چینی جوتیاران، کاتێک درەختێک بەرهەمی نییە، ئەوە پێی دەڵێن درەختێکی بێ بەرە، ئەگەر بەرهەمیشی هەبێت، پێی دەڵێن ئەمە درەختێکی بەردەرە-بەبەرە.

ئەگەر بێت و H بنەگرووپ بێت لە G و، ghg^{-1} بوونی هەبێت لە ناو H بۆ هەموو h یێک لە H و g لە G، ئەوە H پێی دەوترێت بنەگرووپی یاسادار (Normal subgroup). بنەگرووپی یاسادار، ڕێگەخۆشکەرە بۆ دروستکردنی گرووپێکی نوێ لە ڕێگەی گرووپە کۆنەکەوە ئەوەی سەرەتا هەمان بوو.

بەرکەوتە گرووپ، بریتییە لەو گرووپەی کە لە ڕێگەی دانەکانی گرووپەکە لەگەڵ یەکێک لە بنەگرووپە یاسادارەکان دروست دەکرێت. بۆ ئەوەی بەرکەوتە گرووپێک بدۆزینەوە لە ژێر ڕۆشنایی گرووپێک، ئەوە پێوستە ئەو گرووپە بنەگرووپی یاساداری هەبێت. ئەگەر بێت و H بنەگرووپی یاسادار بێت لە گرووپی G، ئەوە بۆ هە دوو دانە a و b لە G، ئەوە یەکێک لەم دووانە:

1) $aH = Ha$، کاتێک xH بریتییە لە کۆمەڵەی هەموو ئەو خاڵانەی کە شێوەی xh هەیە بۆ هەندێک لە h لە H.
2) وەیان ئەو دوو کۆمەڵەیە هیچ دانەیەکی هاوبەشیان نەبێت.

لە مانەوەش گرووپێکی نوێمان دەستدەکەوێت بە ناوی بەرکەوتە گرووپ. ئەمەش واتای ئەوەیە کە دەتوانین بیر لەو کۆمەڵانە بکەینەوە وەک

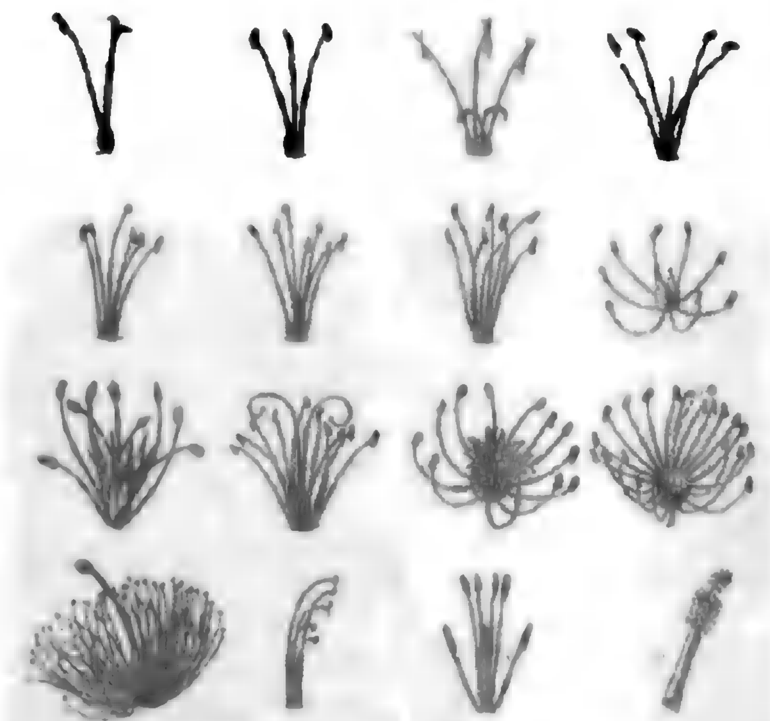
دانەکـــانی کـــۆمەڵەیەکی نـــوێ، کە لەگەڵ یاســـای ئاســـایی پێکهانـــان $(aH)(bH) = abH$. بەرکەوتە گرووپ بە G/H هێما دەکرێت.

بەرکەوتە گـرووپ و بنەگرووپـی یاسـادار، ئەومـان بـۆ روونـدەکەنەوە کە چـۆن گرووپەکـان دەکرێـت وەک هۆکاربەنـدییەک بێـت بـۆ گرووپـی بچـوکتر لە G، کە ئەمەش یـارمەتی تێگەیشـتنمان دەدات لە گـرووپە رەسـەنەکەی خۆمـان. ئەم بنەگرووپـانە وەک بنـاغەیەک کـاردەکەن و گـرنگن بـۆ گـرووپە رەسـەنەکە، وەک چـۆن بە هەمـان شـێوە پێکهـاتەی ژمارەکـان لە رێـگەی ژمـارە خۆبەشـەکانەوە وەسـف دەکـرێن، کە لە بابەتەکـانی پێشـووتر باسـمان کـرد. بـۆیە لە بـابەتی گـرووپ، ژمـارە خۆبەشـەکان تایبەتمەنـدییەکی ناوازەیـان هەیە، ئەویـش ئەوەیە کە جـگە لە خۆیـان، بنەگرووپـی بەردەریـان نییە، تەنیـا بنەگرووپـی بـێ بەرییـان (trivial) هەیە، واتە وەک چـۆن ژمـارەی خۆبەشـەکان نـاتوانین لێکیـان هەڵبوەشـێنینەوە، بەو چەشـنەش ئەو گرووپـانەی لەسـەر ژمـارە خۆبەشـەکان دادەمەزرێـن، بنەگرووپـی بەردەرییان لێ ناکەوێتەوە.

گرووپە سادەکان

Simple groups

گـــرووپە ســـــانا-ســـــادەکان، ئەو گرووپـــانەن کە هـــیچ بەرکەوتە گرووپێکـــی بەردەرییـــان نیـــیە. کە بنەگرووپەکانیشـــی تەنیـــا بـــریتییە لە دانەی بـــێ لایەنەکەی، یـــان گـــرووپە ڕەســـــەنەکە خـــۆی. ئەمەش ڕێـــک وەک تایبەتمەنـدییەی ژمـارە خۆبەشـەکان وایە، کە ئەوان جـگە لە خۆیـان و ژمـارە 1 بەشـــداربووی تریـــان نیـــیە. وەک ژمـــارە خۆبەشـــەکان، کە چـــۆن ناکۆتـــا ژمـارەی خۆبەشـمان هەیە، بەم چەشـنەش ناکۆتـا گرووپـی سـادەمان هەیە، بەڵام جیـــاواز لە ژمـــارە خۆبەشـــەکان، گـــرووپە ســـادەکان دەکرێـــت بە شـــێوازێکی ورد و ڕێـــک پـــۆلێن بکرێـــت. پـــۆلێنکردنەکەش لە ســـاڵی 2004 یەکێـــک بـــووە لە گەورەتـــرین دەســـتکەوتە بیرکارییەکـــان لە 50 ســـاڵی ڕابـــردوو. گـــرووپە خولییەکـــان (دەوری-Cyclic) و خێزانـــی گـــرووپە جێگرەوەکـــان (Alternating groups)، ئەمـــانە هەردووکیـــان لە گـــرووپە ســـادەکانن. ئەو گرووپـــانەش بەهـــۆی-لەکـــاتی لێکـــۆڵینەوە لە مەڕ کـــۆمەڵە کۆتادارەکـــان پەیـــدادەبن. هەروەهـــا 16 خێزانـــی دیـــکە هەن لە گـــرووپە سـادەکان، یەکێـک لەوانە پێیـان دەوترێـت: جـۆرە گرووپەکـانی لای (Lie groups). خێزانێکـــی تـــر کە شـــاز و جیـــاکراوەن، پێیـــان دەوترێـــت گـــرووپە پچڕپچڕەکـــان (Sporadic groups)، وە گرووپـــی شـــەولەبان-دڕنـــدە (Monster group). ئەوانـــی تـــریش ناســـراون بە: نەویســـتەکان (Pariahs).



کارڵ فۆن **لینە** سیستەمی تاکسۆنۆمیک بایۆلۆژیکی دانا بۆ پۆلێنکردنی ڕووەکاکان **بە** پێی شێوە و پێکهاتەکانیان، کە ئەم کارە هاوشێوەی پۆلێنکردنی گرووپە بیرکارییەکانە.

گرووپی شەولەبان-ئەژدیها

The Monster Group

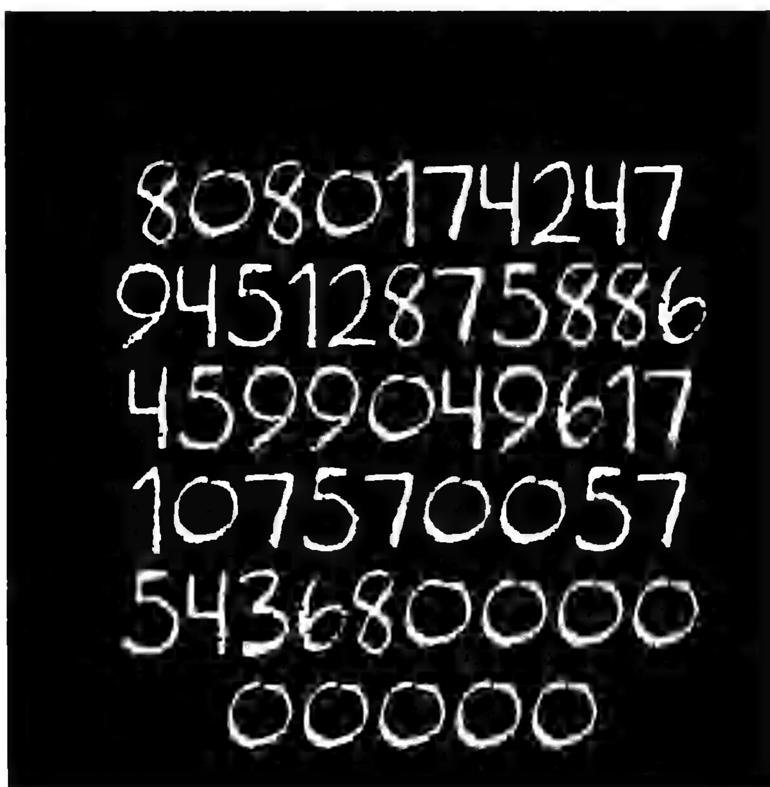
گرووپی شەولەبان[82] یان ئەژدیها، یەکێکە لە گەورەترین گرووپە نەویستە سادەکان و گرنگییەکی زۆری هەیە لە پۆلێنکردنی گرووپە کۆتادارەکان. ئەم گرووپەش هیچ بنەگرووپێکی بەردەری نییە، ئەوەشی هەیەتی گرووپە خۆی و لەگەڵ دانەی بێ لایەن، کە ئەمانەش بنەگرووپی بەردەر نین. لە ساڵی 1970 پرسیارێک لە مەڕ گرووپی درندە هاتە ئاراوە، دواتر لە ساڵی 1982 لە لایەن "رۆبێرت گریسی" یەکلابۆوە و شیکارەکەشی لە چەند پەڕێک بڵاو کردەوە بە ناوی ئەژدیهای هاوڕێیانە- the friendly monster کە تێدا لە:

808017424794512875886459904961710757005754368000000000

دانە پێکهاتبوو، واتە (نزیکی 8×10^{53}). کە بە شێوەی ریزکراوە نووسرابوو، وە ($196{,}196 \times 883{,}883$) ریز و ستوونی پێویست بووە. قەبارەی گرووپی لەو شێوە کاتێکی زۆر دەبات بۆ ئەوەی دڵنیا بین کە

[82] خەڵکی هەولێر زۆر جار لە گێرانەوەی چیرۆک بۆ منداڵەکانیان، وشەی "شەولەبان" بەکاردێنن.

دەشێت بۆ هەموو گرووپە پچڕ پچڕەکان ڕوونبکرێنەوە. هەر چەندە ئەمانە لەسەرەتای سەدەی نۆزدەهەم دۆزرانەوە، بەڵام بە شێوەیەکەی تەواو تەفسیر و لێکدانەوەیان بۆ کرا لە سەرەتاکانی سەدەی بیستەم.



گرووپەکانی لای

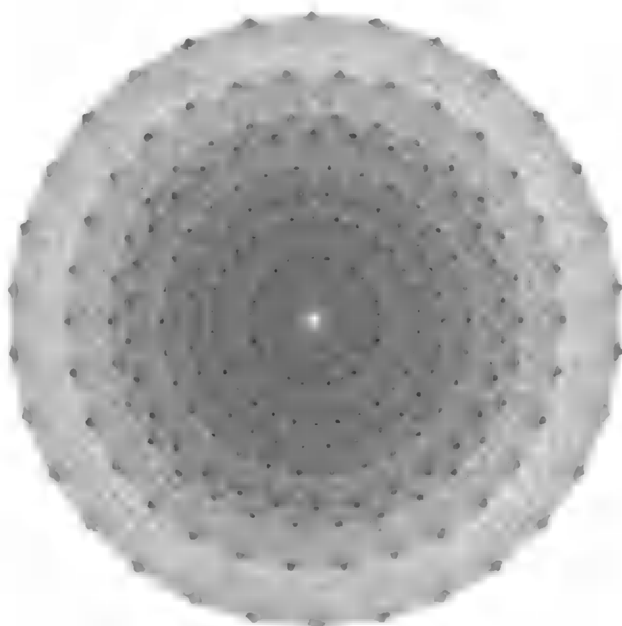
Lie groups

گرووپەکـــانی لای[83] کـــۆمەڵە گـــرووپێکن لە نـــاو خێزانێـــک، کە گرنگییەکـــی زۆریـــان هەیە، کە دانەکـــانی پشـــت بە گـــۆڕاوە بەردەوامەکـــان دەبەســـتن، کە بە پـــێچەوانەی پێکهـــاتەی گرووپـــی شـــەولەبان و گـــرووپە هاوجێیەکـــان لە مەڕ چەنـــد لایەکـــان. بۆنمـــونە، ئەگەر بێـــت و ســـەرنجی هـــاوجێیەتی بـــازنە بـــدەین، دەبینـــین کە ســـووڕاندن بە هەرگۆشـــەیەک بە نـــزبەت چەقەکەیەوە هەر دەکـــاتەوە بـــازنەکە خـــۆی، واتە بـــێ هـــیچ گۆڕانکـــارییەک، بـــۆیە گرووپـــی هـــاوجێ لە مەڕ بـــازنە ناتوانـــدرێن وەک گـــرووپە هاوجێیەکـــانی تـــر لە مەڕ چەنـــدلایەکان پـــۆلێن بکرێـــت، بـــۆ نمـــونە لەگەڵ ســـێ لایەکـــی رێـــک کە 6 دانەی جیـــاوازی هەیە. گرووپـــی هـــاوجێیەتی بازنە، یەکێکە لە گرووپەکانی لای.

تیـــۆری گـــرووپە بەردەوامەکـــان زۆر ئـــاڵۆزترە بە بەراورد لەگەڵ گـــرووپە پچـــڕ پچڕەکـــان، لەگەڵ ئەمەش، گرووپەکـــانی لای باشـــترینە بـــۆ تێگەیشـــتن لەمـــانە. مـــومکینە ئەمـــانە تەفســـیر بکـــرێن تەنیـــا بەهـــۆی سروشـــتی پارامیتەرەکانیـــانەوە، بەڵام ئەمـــانە شـــتانێکی زۆر زیاتریـــان بـــۆ دەمێنێـــتەوە وەک لە پێکهـــاتە بەردەوامەکانیـــان. ئەمە دەکرێـــت بە شـــێوەیەکی ســـاف

[83] ناوی ئەو کەسەیە کە گرووپەکەی دۆزیوەتەوە.

(smooth) یـــان جیاکـــارانە، یـــا فرەیـــی ببینـــدرێت، کە جـــۆری تـــایبەتین لە ئاموورتەی تۆپۆلۆجیانە.



نواندنی یەکێک لە گرووپەکانی لای E8.

تیۆری ئەڵقە

Ring theory

تیـــۆری ئەڵـــقە، بـــریتییە لە پێکهـــاتەیەکی پەتـــی بیرکارییـــانە کە کـۆمەڵەیەک دانە بەیەکەوە لە خۆدەگرێـت لەگەڵ جـووتە کردارێکـی دووانـی. لەمەو پـێش گرووپمـان بـاس کـرد، کە تەنیـا لە یەک کـرداری دووانـی لەخـۆ دەگرێـت لەگەڵ کـۆمەڵەیەک لە دانەکـان. لە تیـۆری ئەڵەقەکـان، کردارەکـانی وەک هەمیشـــە، بە (+) کـــۆکردنەوەو و (×) جـــارانکردن بانگـــدەکرێن، وەک چـۆن لەگەڵ گرووپەکـان کاتێـک لە ژێـر ڕۆشـنایی لە یەکێـک لە کردارەکـان، ئەگەر دوو دانەمـــان بەســـەریدا جێبەجـــێ کردبـــا، دەبـــوو ئەو ئەنجـــامەی بەدەســـتمان دەکەوێـت لە هەمـــان تـــووخمی ئەو دوو دانەیە بـــوایە، ئەمە بـــۆ ئەڵـــقەش هەر وایە. بەڵام جیـاواز لە گـرووپ، کاتێـک لە گـرووپ شـــتێکمان نەبـوو بە نـاوی سـیفەتی ئـاڵوگۆڕی ، بـۆیە کـرداری کـۆکردنەوە لە تیـۆری ئەڵـقە پێوسـتە سـیفەتی ئـاڵوگۆڕی (Commutative) هەبێـت. بە واتـایەکی تـر، بـۆ هەر دوو دانە a وb ئەوە دەبێـت $a+b=b+a$. کە دەبێـت لەو پرۆســـەیە دانەی بـــێ لایەن (Identity) و هەڵـــگەڕاوە (Inverse) بـــۆ دانەکـان بـوونی هەبێـت، بـۆیە دەبێـت لە کـرداری جـارانکردنیش سـیفەتی یەکتربەســـتنی هەبێـت. بەکـــورتی، دوو ڕێســـاکە کە دەبێـت ڕووبـــدات و بێتەجـــێ لە کـــاتی پـــێکەوە کۆبـــوونەوەی کردارەکـــانی کـــۆکردنەوە و جـارانکردن، ئەوانـیش یاسـای یەکتـر بەسـتن (Associative) بەسـەر کۆکردنەوە، واتە پێکەوە بەستانی جاران و کۆکردنەوە بەیەکەوە:

$$a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c) \quad و \quad (a + b) \times c = (a \times c) + (b \times c)$$

کـۆمەڵەی ژمـارە سروشـتییەکان، ڕێژەییەکـان و ڕاسـتییەکان ئەمـانە گشـتی ئەڵـقەن. لەگەڵ ئەمەش، ئەڵقەیەکـی گشـتی چەنـد تایبەتمەنـدییەکی هەیە، ئەگەر بێـت و $a \neq 0$ ، کاتێـک 0 بـریتییە لە دانەی بـێ لایەن لە کـرداری کـۆکردنەوە، کـاتێکیش ئەو ژمـارەیە لەگەڵ ژمـارەی تـر دەگەنە یەکتـر لە کـاتی بەکارهێنـانی کـرداری کـۆکردنەوە، ئەوە ئەو ژمـارەی لەگەڵـی دێـت وەک خـۆی دەمێنێـتەوە: $1 + 0 = 1$ ، بەڵام ئەگەر $a \times b = 0$، ئەوە نـاتوانین بڕیـار بـدەین کە کامەیـان دەبێـت سـفر بێـت، ئەگەر چیـی زۆر ڕوونـیش دیـارە بـۆ ژمـارە ڕێژەییەکـان و تەواوەکـات یـان ڕاسـتییەکان. سـەرەڕای ئەمـانەش، تیـۆری ئەڵـقە بە شـێوەیەکی سروشـتیانە سـنووردار دەکرێـت لە پانتـایی بیرکاریـدا، بە تـایبەتی بە پەیوەنـدی لەگەڵ تیـۆری گـرووپ، سـنوورداکردنیش وەک ڕێـگەدان بە لابـردن و سـڕینەوە لە کـرداری جـارانکردن، وەک لەو هاوکێشـەیە: $a \times b = a \times c$ لێـرە دەکرێـت a لابردرێـت (Cancellation). بـۆیە ئێسـتا دێـن بە شـێوەیەکی ڕسـمی پێناسـەی ئەڵـقە دەکەیـن: ئەڵـقەیەک R بـریتییە لە کـۆمەڵەیەک (Set) لەگەڵ جـووتە کرداریکـی دووانـی (Two binary operation) ئەوانـیش (+) و (.) ئەگەر هاتوو ئەو چەند مەرجەی خوارەوەی تێدا بێتە دی:

i. پێوستە $(R,+)$ ئەبیلییەن گرووپ بێت (Abelian).

ii. بــۆ هەمــوو دوو دانە $a,b \in R$ بە هەمــان شــێوە دەبێــت $a.b \in R$

iii. ســیفەتی یەکتــر بەســت، $(a.b).c = a.(b.c)$ بــۆ هەمــوو سێ دانەیەک $a,b,c \in R$

iv. ســیفەتی بەشــینەوە لە نــاو R، کە بــۆ هەمــوو ســێ دانەیەک $a,b,c \in R$ دەبێت

$$(a+b).c = a.c + b.c \text{ و } a.(b+c) = a.b + a.c$$

تێبینی: مەبەست لە "ئەبیلییەن گرووپ" سێ شتە، ئەوانیش:

i. $(R,*)$ سیفەتی ئاڵوگۆڕی هەبێت (Commutative)

ii. (R,o) نیوەگرووپ بێت (Semigroup)

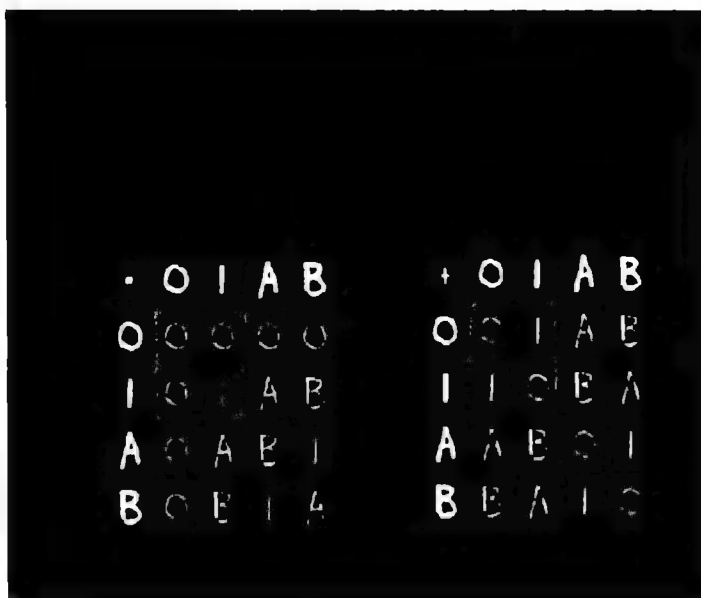
iii. سیفەتی ئاڵوگۆڕی بێتەدی.

مەیدانەکان

Fields

مەیدانەکان، بریتین لە بونیاتێکی جەبری پەتی کە دوو جووتە کردار لەخۆی دەگرێت. هەر وەک تیۆری ئەڵقە، ئەو کردارانەش بریتین لە جاران کردن و کۆکردنەوە، وە بەهەمان شێوە سیفەتی ئالوگۆڕی بۆ هاتۆتە سەر بە هەمان فۆرمی تیۆری گرووپ کە پێشتر باسمان کرد. تیۆری مەیدان هەر لە دەڤەری تیۆری ئەڵقە دروست دەبێت، چونکە هەر ئەڵقەیەک ئەگەر هاتوو: 1) هەڵگری سیفەتی ئالوگۆڕی بوو لەگەڵ هەبوونی دانەی بێلایەن. 2) بۆ هەر دانەیەک، هەڵگەڕاوەکەی بوونی هەبێت. ئەوە بە هاتنەجێی ئەو دوو مەرجە، **تیۆری مەیدان** دروست دەبێت. بۆیە بۆ هەر دوو دانەیەک a و b، ئەوە: $a \times b = b \times a$ ، وە جگە لە بوونی دانەی بێ لایەن لە کرداری جارانکردن وەک لە تیۆری گرووپ و، هەروەها سیفەتی یەکتر بەستن کە لە ئەڤقەلەش دەهاتە دی. پێناسەی مەیدان دەڵێت: **مەیدان بریتییە لە ئەڵقەیەکی هەڵگری سیفەی ئالوگۆر (Commutative ring) لەگەڵ دانەی بێ لایەن بە نزبەت کرداری جاران، وە بۆ هەر دانەیەک کە سفر نەبێت، هەڵگەڕاوەکەی وجودی هەبێت.** ئەمەش واتای ئەوەیە دابەشکاری لە مەیدان مومکینە بۆ هەموو دانەکان بێجگە لە دانەی بێ لایەن لە کرداری کۆکردنەوە. ئەوەش واتە، بە پێچەوانەی ئەڵقە، ئەگەر $a \times b = a \times c$ و $a \neq 0$ ، ئەوە $b = c$. بۆیە تیۆری مەیدان داناسقەترە وەک لە تیۆری ئەڵقە. ژمارە تەواوەکان،

ڕێژەییەکـــان و ژمـــارە ڕاســـتییەکان گشـــتیان دەبـــن بە مەیـــدان، وەک چـــۆن دەشـــبنە ئەڵـــقە، واتە گشـــت مەیـــدانێک دەبێـــتە ئەڵـــقە، بەڵام پـــێچەوانەکەی ڕاســـت نیـــیە. نمـــونەیەکی تـــر لە هەمـــبەر مەیـــدان، بـــریتییە لە کـــۆمەڵەی ئەو ژمارانەی کە ئەو فۆرمەیان هەیە $a + b\sqrt{2}$ کاتێ a،b ژمارەی ڕێژەین.



ئەم دوو خشـــتەیە دوو ئۆپەریشـــن-کـــردار دەنـــوێنن لە مەیـــدانێکی ســـادە و ســـاکار بـــۆ چـــوار دانە O و I،A،B. کە I بـــریتییە لە دانەی بـــێ لایەن لە کـــرداری جـــاران، O بـــــریتییە لە دانەی بـــــێ لایەن لە کـــــرداری کۆکردنەوەکە.

تیۆری گالوا

Galois Theory

گالوا، شۆڕشگێڕێکی فەرەنسی لە زانست ((کەسێکی بێ بڕوانامە))، یەکەم کەس بوو کە بەردی بناغەی تیۆری گرووپەکانی دانا و توێژینەوەکانی شۆڕشێکی لە جەبردا بەرپا کرد، کە بە بیردۆزی گالوا ناسراوە. بیردۆزی گالوا دەرگایەک بوو بۆ شیکارکردنی چەندین پرسی بیرکاری، یەکێک لەو ئەنجامانەی لە بیردۆزەکەی ئەو کەوتەوە، ئەوە بوو کە شیکارێکی گشتی بۆ هاوکێشەی سەروو پلە 4 بوونی نییە. گالوا کۆماریخوازێکی توندڕەو بوو، بەو هۆیەوەش ماوەیەک لە بەندیخانە بوو. [گالوا لەسەر کچێک بریندار بوو و کوژرا].

گالوا، توانی شتانێک بدۆزیتەوە، کە تا دونیای ماتماتیک ماوە ئەوە هەر باسی لێوە دەکرێت و هەر بە نەمری دەمێنێتەوە. تیۆری گالوا، بریتییە لە تیۆرییەک کە لە نێوان تیۆری گرووپ وتیۆری مەیدان (مەیدان) پەیوەندییەک دروست دەکات، هەروەها پێکەوە بەستانی تیۆری گرووپ و شیکاری زۆر ڕادەدارەکان. بەهۆی تیۆری گالواوە دەتواندرێت هەندێ لە کێشەکانی تیۆری فیلد لە تیۆری گرووپ قسەی لێوەبکەین و باشتر لێی تێبگەین، واتە پوختکردنەوەی کێشەکان لە تیۆری مەیدان بۆ تیۆری گرووپ، واتە لە ڕێگەی ئەم تیۆرییەوە قسە لەسەر فلید دەکەین بەهۆی تیۆری گرووپ لە ژێر هەندێک مەرج. شیکاری گشتی بۆ ڕادەدارەکانی پلە: 2 و 3، لە کۆتاییەکانی سەدەی شازدەم دۆزرانەوە، بەڵام بۆ پلەی

بەرزتر، نەتواندرا شیکارێکی گشتیان بۆ بدۆزرێتەوە. گالوا توانی پیشانی بدات کە تیۆری گرووپ دەتوانێت ئەوە دەربخات کە کەی ڕادەدارێک شێوەیەکی گشتی بۆ شیکارەکەی هەیە، واتە فۆرمێکی داخراو کە لە چەند کردارێکی جەبری پێک دێت. بۆیەش ئەو ڕاستییەی دۆزییەوە کە هەبوونی فۆرمی شیکارە داخراوەکانی هاوکێشەکان پەیوەندی هەیە بە سیفەتی ئالوگۆڕی گرووپەکە. تەنیا چوار گرووپی سەرەتا کە توانای شیکارکردنیان هەیە؛ گالوا بونیادی نان هەر چواریان سیفەتی ئالوگۆڕییان هەبوو. هەمووی ئەوەی ئێستا دەیزانین، ڕادەدارەکان تەنیا تا پلەی چوار دەتواندرێت شیکاربکرێت و شیکارەکەی بدۆزرێتەوە بە شێوەیەکی گشتی لە چەند ڕادەیەکی جەبری سادە و نەخشەی جەبری. هەر لە ڕێگەی تیۆری گالواوە، ئەوە ڕوون بۆوە کە هەندێ کێشە ناتواندرێت شیکاربکرێن، بۆ نموونە: دوو هێندەکردنی شەش پاڵو، دووجارکردنی بازنە...



تیۆری گالوا کەرەستەیەک بوو بۆ دۆزینەوەی (هەبوون یان نەبوون) شیکاری گشتی ڕادەدارەکان، وەک ڕادەداری پلە ٥ کە لەسەرەوە نیشاندراوە، کە دۆزینەوەی شیکارەکەی مەحاڵە.

تیۆری بەرق

Moonshine theory

لە بیرکاریـــــدا، تیـــۆری بەرق[84] دەرخســـــتی پەیوەنـــدییەکە لە دوو دەڤەری جیـــاواز لە پانتـــایی بیرکـــاری، ئەوانـــیش گرووپـــی شــــەولەبان (Monster group) و جۆرێـــک لە نەخشـــــەی شـــیکارەیی-ئەنەلاتیـــک (Modular functions) لە ژمــــــــــارە ئالۆزەکـــــــــان، کە لە لایەن دوو بیرکـــاریزانی بەریتـــانی (Simon Norton - John Conway) پێشـــــنیارکرا بـــــوو، کە پـــــاش ئەوەی (John Kay) لە ســــــیمنارێک گونجانـــدنێکی نـــاوازەی بـــاس کـــرد لە ســـاڵی 1978. کەی (Kay) ســـەرنجی دا کە کـــۆلکەیەک لە فراوانبـــوونی نەخشـــەکان پێناســـەکراوە لە تیـــۆری ژمارەکـــان لە لایەن (Felix Klein) کە کـــۆلکەکەی بریتبـــوو لە 196،884، کە ئەمەش تەنیـــا لە یەک شـــمارە-رەنـــووس لەگەڵ قەبـــارەی گرووپـــی شـــەولەبان جیـــاوازە لە فۆرمی ڕیزکراوەدا.

دواتـــر پرســـــیارێک هـــــاتە ئـــاراوە، کەبـــۆچی ئەم دوو پانتـــاییە، ئەم تیـــۆرییە ســـــەرئاو دەخەن؟ بـــۆ وەڵامـــی ئەو پرســـیارە، ریچـــارد بۆرچیـــدس (Richard Borcherds) لە ســـــاڵی 1992 پیشـــــانی دا، کە پەیوەنـــدییە

[84] بەرق واتە گـــورزەی ڕوونـــاکی مانـــگ. وەک محـــوی شـــاعیر لە شـــعرێک دەڵێـــت: ئەگەر کەسێ شێتانە بەردم تێگرێت، ئەوە من بەرقی تێدەگرم.

قولەکەی نێوان ئەم دوانە چییە ، بەم کارەشی خەڵاتی فیلدزی[85] بیرکاری وەرگرت. لەگەڵ ئەمەش، چەندین زانیاری لە هەمبەر ئەم پەیوەندییە لە نێوان، تیۆری کوانتەم، جەبر، تۆپۆلۆجی-شوێنناسی و تیۆری ژمارەکان بە نەزانراوی ماوەتەوە، واتە تا هەنووکە لێیان تێنەگەیشتووینە.

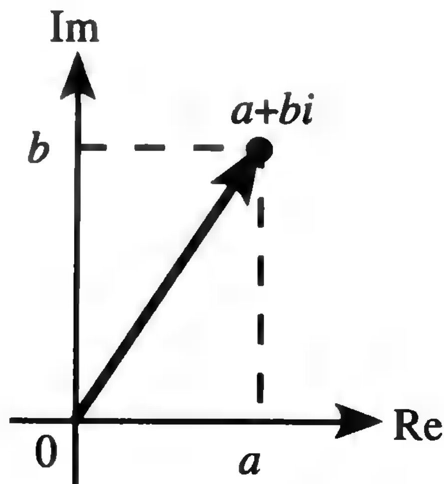


[85] خەڵاتی فیلدز خەڵاتێکە تایبەتە بە بیرکاری، کە هاوتای نۆبلە. بیرکاریزانی کورد (کۆچەر بیرکار) کە براوەی ئەو خەڵاتەیە.

بەشی نۆیەم

ژمارە ئاڵۆزەکان-ئاوێتەکان

Complex numbers



ژمارە ئاوێتەکان

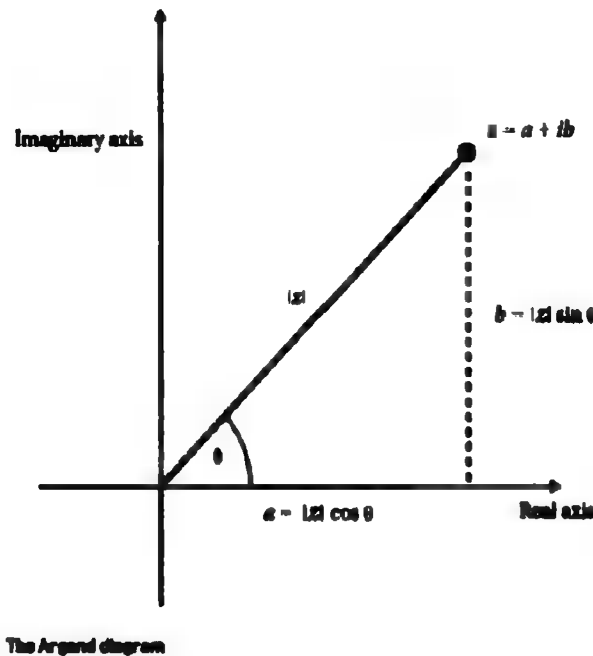
Complex numbers

دەتوانین بڵێین: ژمارە ڕاستییەکان؛ ئەوانیش هەر ژمارە ئاوێتەکانن، لەبەرئەوەی هەموو ژمارەیەکی ڕاستی دەکرێت بە شێوەی ژمارە ئاوێتەکان لێی بنۆڕین، ئەویش کاتێک بەشە خەیاڵییەکەی سفرە. لە بابەتەکانی ڕابردوو باسی ئەوەمان کرد کە ئەو هۆکارە چی بوو کە وای کرد ژمارە خەیاڵییەکان پەیدا بن، ئەویش: ئایا شیکاری هاوکێشەی لەم شێوەیە: $x^2 + 1 = 0$ چییە؟ هەر ژمارەیەکی ئاوێتە z دەتوانرێت لەسەرە شێوەی $a + ib$ بنووسرێت، کاتێک a و b دوو ژمارەی ڕاستین و، i بریتییە لە ڕەگی دووجای: -1، واتە $i^2 = -1$. وتمان b و a دوو ژمارەی ڕاستین، بە a دەوترێت بەشی ڕاستی z (Real part) ، وە بە b دەوترێت بەشە خەیاڵییەکەی z (Imaginary part).

ئەگەر بیر لە پێکهاتەی ژمارەی ئاوێتەکان (a,b) بکەینەوە وەک دوو ژمارەی ڕاستی لە پۆتانی دیکارتی، ئەوە دەتوانین ئەندازەیەک بۆ ژمارە ئاڵۆزەکان بدۆزینەوە، وەک لە وێنەکەدا دیارە. ئەم وێنەیە ناسراوە بە وێنەی ڕوونکردنەوەیی ئارگانت (Argant). هەر خاڵێک لە ڕووتەختەکەدا، واتە هەر ژمارەیەکی ئاوێتە لە ڕووتەختدا-ڕووتەختی ئاوێتە (Complex plane)، دوورییەکی هەیە لە خاڵی بنەڕەت، کە پێی دەوترێت بەهای ڕووتی ژمارەی ئاوێتەی z (Absolute value) کە بە $|z|$ هێما دەکرێت. بە پشت بەستن بە بیردۆزی فیساگۆرس، دەتوانرێت

$|z|$ بە پێی دوو پێکهێنەرەکەی (Components) بنووسرێت واتە: $|z|^2 = a^2 + b^2$ هەروەها هەر ژمارەیەکی ئاوێتە گۆشەیەکی هەیە، کە پەیوەندی بە تەوەری X ەوە هەیە، کە پێی دەوترێت جەمسەری ژمارەی ئاوێتە (Argument of complex number)، بەم هۆیەوە دەتوانین ژمارە ئاوێتەکان لە پێکەوە بەستانی گۆشەکەی و مەوداکەی بنووسین، ئەویش بەهۆی:

$$z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$$



The Argand diagram

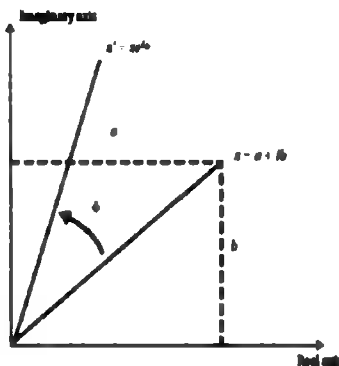
ئەندازەی ژمارە ئاوێتەکان

Geometry of complex numbers

لە بابەتی پێشتوو تر باسی ڕووتەختی دیکارتیمان کرد، هەروەها باسی ژمارە ئاوێتەکانمان کرد. ئەوەی ماوە، ئەوەیە ئەندازەی ژمارە ئاوێتەکان چۆنە و لەکوێ دەکرێت پیشانبدرێت؟ لە راستیدا ئەو ڕووتەختەی پێشتر خوێندوومانە، کە تێیدا مەبەستمان ڕووتەختی دیکارتییە، هەر هەمان ڕووتەخت بۆ ژمارە ئاڵۆزەکان بەکاردێت، تەنیا ئەوە نەبێت کە تەوەرەی X دەبێتە بەشی ڕاستی ژمارەکە، تەوەرەی y دەبێتە بەشی خەیاڵی ژمارەکە. لە ڕووتەختی ژمارە ئاوێتەکان (Complex plane) دوو شت بە زەقی جیادەکرێتەوە کاتێ ژمارە ئاوێتەکان دەخوێنین، ئەویش ئاوەڵی ژمارە ئاوێتەکان (Conjugate number) و لاسەنگەی سێگۆشەیی (Triangle inequality). وا دانێ کە: $z = a + ib$ هەر ژمارەیەکی ئاوێتە بێت، ئەوە ئاوەڵی (Conjugate) ئەو ژمارەیە بە $\bar{z}$ یان z^* هێما دەکرێت و بریتییە لە: $a - ib$ ، واتە ئەگەر $\bar{z}$ و z لەسەرە ڕووتەختی ژمارە ئاڵۆزەکان بنوێنین، ئەوە $\bar{z}$ دەبێتە وێنەدانەوەی z بە دەوری تەوەرەی ژمارە ڕاستییەکان. لە ڕێگەی چەند هەنگاوێک و هەژمارکردنێک دەبنین کە $|z|^2 = zz^*$. هەروەها دەکرێت هەر یەک لە بەشە ڕاستی و خەیاڵییەکەی ژمارەیەکی ئاوێتە بە جیا بنووسرێت، $b = \frac{(z-z^*)}{2i}$ ، $a = \frac{z+z^*}{2}$ کە ئەمانەش کارئاسانیمان بۆ دەکەن لە مەڕ خوێندن و لێکۆڵینەوە سەبارەت

بە ژمــارە ئاڵۆزەکــان و داتاشــینی بیردۆزەکــان[86]. لاســەنگەی سێگۆشــەیی (Triangle inequality) بــریتییە لە لاســەنگەیەکی بیرکارییــانە لە نێــوان لایە درێــژەکەی سێگۆشــەیەک و لایەکــانی تــر، کە بەســتانەوەیان بەهــۆی ئامرازەکــانی بەراوردکردنــی ژمارەکــان. دەقــی لاســەنگەکە ئەوەیە: لایە درێــژەکەی سێگۆشــەیەک، بچــوکتر یــان یەکســان دەبێــت بە کــۆی دوولایەکەی تــری. بــۆیە کــۆی دوو ژمــارەی ئــاوێتە بە ئەنــدازەییانە وەک کــۆی دووی ئاراســتەبڕ وایە، لەکاتێــک بەشــەکانی ژمــارە ئــاوێتەکە بــریتییە لە بەشــە خەیــاڵییەکەی و بەشــە ڕاســتییەکەی. بــۆیە ئەگەر بێــت دوو ژمــارەی ئاوێتەمان هەبێت Z، W ، ئەوا:

$$|z + w| \le |z| + |w| .$$



[86] لە قۆنــاغی چــواری زانکــۆ، لە وانەی شــیکردنەوەی ئــاوێتە (Complex analysis)، لە تــاقیکردنەوە پرســیارێکم شــیکارکرد بەهــۆی بەکارهێنــانی ئەو دوو دەرهاوێشــتەی ژمــارە ئاوێتەکــان، بەم هــۆیە بەڕێــز (د. فریــاد حوســێن) خۆشــحاڵی خــۆی دەربــڕی بــۆ شــیکارەکەم، کە وەک هاندانێک بوو تا زیاتر هەوڵ بدەم، لێرەوە سوپاسی دەکەم.

جێگۆڕکێی مۆبیوس

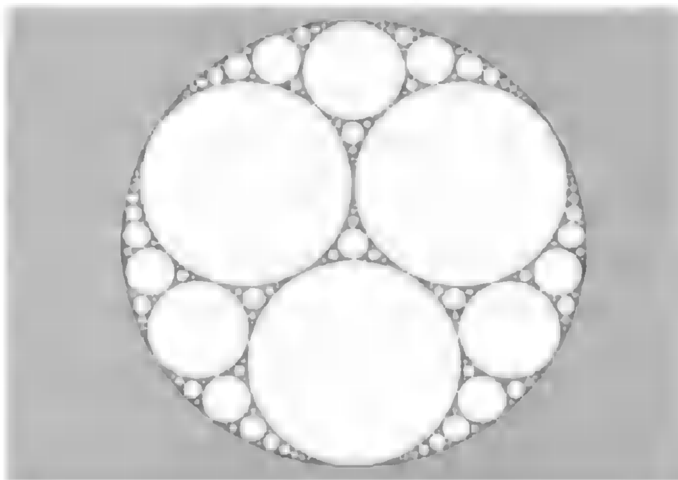
Möbius transformation

جێگۆڕکێی مۆبیوس[87] بریتییە لە نەخشەیەکی ڕێژەیی لە ڕووتەختی ژمارە ئاوێتەکان کە تێدا؛ ڕاستەهێڵ شێوەگۆڕکێی پێ دەکرێت بۆ بازنە، یان بازنە شێوە گۆڕکێی پێدەکرێت بۆ ڕاستەهێڵ، یانیش ڕاستەهێڵ هەر بۆ ڕاستەهێڵ و بازنە هەر بۆ بازنە بەڵام بەگۆڕانکاری، کە ئەویش لە ڕێگەی ئەو فۆڕمەیە: $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ کاتێک $ad - bc \neq 0$، و $a, b, c \ \& d$ گشتیان ژمارەی ئاوێتەن و z بریتییە لە گۆڕاوێکی ئاوێتە (Complex variable). جێگۆڕکێ یان شێوەگۆڕکێی مۆبیۆس، لە فیزیا گرنگییەکی زۆری هەیە ، هەندێ پرس هەن چارەسەرکردنیان زەحمەتە لەو ئاهووتەیەکەی کە تێدایە، بۆیە لە ڕێگەی شێوەگۆڕکێی مۆبیۆس کێشەکە سادەتر دەردەکەوێت و چارەسەرکردنی ئاسانترە، دوای ئەوەی کە چارەسەرکرا، ئەوە دەگەڕێندرێتەوە بۆ شێوە ڕەسەنەکەی خۆی. بۆ نمونە ئەگەر قوماشێکی 10 مەتری بتەوێت بیکەیتە دوو پارچە، ئەوە قوماشەکە دەنووشتێنینەوە بۆ سەر یەکتر دەبێتە 5 مەتر، پاشان دەیکەینە دوو

---

[87] مۆبیوس، بریتییە لەو ئەندازەیەی یان ئەو شێوە ئەندازەیەی کە تەنیا یەک ڕووی هەیە. وەک لی سیمۆلین لە چاوپێکەوتنێکدا دەڵێت: گەردوون تەنێکی شێوە مەحاڵە. ناوەوەی هەیە بەڵام دەرەوەی نییە، دراوێکی تاک ڕوویە. ئەم تەلارسازییە مۆبیوسە ئاڵەنگارییەکی تاقانە دەخاتە بەردەم گەردووناسان، ئەوانەی کە خۆیان لە پێگەیەکی نابەجێدا دەدۆزنەوە؛ گیربوون لەناو ئەو سیستەمەدا کە هەوڵی لێ تێگەیشتنی دەدەن. (پەیجی فیزیک بۆ کورد).

پارچە، کە کردمانە دوو پارچە، تۆماشەکە هەڵدەدەینەوە، شێوەگۆڕکێش بیرۆکەکەی بەم شێوەیەیە. هەندێک کۆمەڵەی ڕێزکراوی ئاوێتە 2 × 2 دەتواندرێت بەهۆی جێگۆڕکێی مۆبیۆسەوە شتی جوان و سەرنج ڕاکێشی لێوە بەدەستبهێندرێت، وەک ئەو وێنەی لە خوارەوە پیشاندراوە کە فراکتالێکە- لەیەکبوو[88] پێی دەڵێن: Apollonian gasket. چۆنییەتی دروستکردنی لە ڕێگەی جێگۆڕکێی-شێوەگۆڕکێی مۆبیۆسەوە دروست دەبێت، ئەویش لە سەرەتا لە سێ بازنە هاوچەشن-یەکسان دەست پێ دەکات، دواتر هەرچیی کەلێن هەیە، بە بازنەی بچکتر پڕدەکرێتەوە، تا ئەو شێوەیە وەردەگرێت.



[88] لەیەکبووەکان (Fractal) پێکهاتەیەکی ئەندازەیییە، کە لە گەورەکردنەوە و دووبارەکردنەوەی شێوە ئەندازەییەکانی لێکچووی شێوە بنەڕەتییەکە پەیدا دەبێت. بە دەستەواژەیەکی تر فراکتال بە پێکهاتەیەک دەوترێت کە هەر بەشێکی هاوشێوەی شێوە گشتییەکەیە. فراکتال لە دوور و لە نزیکەوە یەکسان دەبینرێت، بەم تایبەتمەندییەی فراکتال دەڵێن لەخۆچوویی (self-similar).

زنجیرەی توانی ئاوێتە

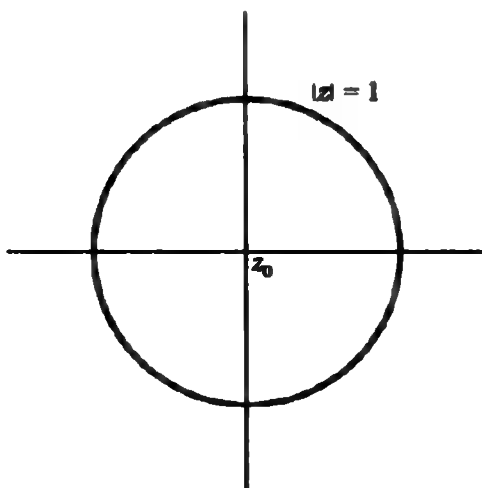
Complex power series

زنجیـــرەی ئـــاوێتەیی یـــان زنجیـــرەی تـــایلەری ئـــاوێتە، بـــریتییە لە زنجیرەیەکی ناکۆتا لە ڕادە لەسەر شێوەی:

$$a_1z + a_2z^2 + a_3z^3 + \cdots$$

کاتێـــک کۆلکەکـــانی a_k گشـــتیان ژمـــارەی ئـــاوێتەن. بە شـــێوەیەکی گشـــتی دەتوانـــدرێت لە شـــوێنی z دا، $(z - zo)$ دابنـــێن بە پێـــی ژمـــارەیەکی دیـــارکراوz_0 لە ژمـــارە ئاوێتەکـــان. زنجیـــرە توانییەکـــان لە چـــارچێوەی ژمـارە ڕاسـتییەکان بـابەتی نزیکبـووە یـان دووکەوتـووە چەقـی بـابەتەکەبوو. یەکێـک لە ڕێگاکـان بـۆ ڕۆنـانی نزکیبـوونەوەیی، بـریتییە لە بەراوردکـاری لە مەودای هەر ڕادەیەکـــــــــــــــــــــــــی $|a_0| + |a_1z| + |a_2z^2| + \cdots$ لەگەڵە زنجیـــــرەی ئەنـــــدازەیی $1 + r + r^2 + r^3 \ldots$ بەو شـــــێوەیە. ئەگەر بێـــت و ئەو زنجیـــرەیە لێکنزیکبـــووە بێـــت بـــۆ هەر نرخێکـــی Z، ئەوە نەخشـــەیەک لە ڕێـــگەی ئەو زنجیـرەوە بنایـاد دەنـدرێت و پێـی دەڵێـت بەحـاڵ (بەجـێ-Entire). نەخەشـــەی بەجـێ، بـریتییە لەو نەخشـــەیەی کە ڕادەدارێـکە لە گـــۆڕاوی ئـــاوێتە و، نەخشـــەی تـــوانی لە گـــۆڕاوی ئـــاوێتە لەخۆدەگرێـــت. ئەگەر بێـت و زنجیـرە تـوانییەکە لێکنزیکبـووە بێـت بـۆ نرخێـک، کاتێـک Z لە z_0 نزیـــــک دەکەویـــــنەوە، ئەوە نیـــــوەتیرەی لێکنزیکبـــــووەکە بە گـــــوێرەی زنجیـــرەکە دەکـــاتە گەورەتـــرین r بەو مەرجەی کە زنجیـــرەکە لێکنزیکبـــووە

بێــت بــۆ هەمــوو zێــک لە نــاوەوەی بــازنەیەک کە نیــوەتیرەکەی ٢ و چەقەکەشی بریتی بێت لەz_0 .



مەودای زنجیرەیەکــی تــوانی ئــاڵۆز، کە لێکــدوورکەوتنەوە پیشــان دەدات لە هەنــدێ خاڵــدا و نیــوەتیرەی لێکنزیکبــووە لە دەوروبەری خــاڵێکی دراو کە بریتییە لە: z_0 .

توانییە ئاوێتەکان

Complex exponentials

لە بابەتەکانی ڕابردوو باسی نەخشەی توانیمان کرد لەسەر ژمارە ڕاستییەکان، بەهەمان شێوە دەتوانین قسە لەسەر نەخشە توانییەکان بکەین لەهەمبەر توانی ژمارە ئالۆزەکان کاتێک بنچینەی نەخشەیەک ژمارەیە.

ئەگەر بێت و $z = x + iy$ ئەوە دەتوانین توانەکە بگۆڕین بۆ ژمارەیەکی ئاوێتە، واتە e^{x+iy} . وەک دەزانین بە e دەوترێت ژمارەی ئۆیلەر. ئێمە لێرە دەتوانین بەشە ڕاستییەکە و بەشە خەیاڵییەکەی ژمارە ئاوێتەکە جیابکەینەوە و بە جیا بیانووسین، کە بە e^x دەوترێت توانی بەشی ڕاستی هەر ئەوەی لە ژمارە ڕاستییەکان هەمان بوو، بە e^{iy} دەوترێت بەشی توانی خەیاڵی. هەر ئەم جیاکردنەوەیە دەمانبات بۆ شتێکی تر، ئەویش ئەوەیە کەی بەشە خەیاڵییەکە ،دەتواندرێت بەهۆی زنجیرەوە بنووسرێت، هەر بۆیە ئەوەی دەستمان دەکەوێت ئەوەیە: $e^{iy} = cos\, y + i\, sin\, y$ ، لەو هاوکێشەیە بۆمان دەردەکەوێت کە نەخشە سێگۆشەییەکان تەنیا پەیوەندی بە ئەندازە و ژمارە ڕاستییەکان نییە، بەڵکو ئەوەتە ئەو نەخشانە دێنە ناو ژمارە ئاوێتەکان و بەشداری گرنگ دەکەن لە داتاشینی یاساکان.

نەخشــە توانییەکــان پێشــتر باســی بەکارهێنانیمــان کــردووە، بەڵام لە مەڕ ژمــارە ئالۆزەکــان دیســانەوە گرنگــی و بەکارهێنــانی زۆری هەیە لە بـواری ئەنـدازیاری و فیزیـا... بـۆ نمـونە لە فیزیـا بەکاردێهنـدرێت بـۆ وەسـفی ئەگەری ڕووداوێـک لە کـوانتەم میکانیـک. پەیوەنـدی نێـوان نەخشــەی تـوانی ئــــالۆز و لەگەڵ نەخشــــە سێگۆشــــەییەکانی وەک ســــاین و کۆســــاین، دەمــانگەیەنێتە هاوکێشــەکی زۆر جــوان کە پێــی دەڵــێن هاوکێشــەی ئــۆیلەر یــان هاوئەنجــامی ئــۆیلەر، کە هاوکێشــەکەش بــریتییە لە: $e^{i\pi} + 1 = 0$ ، **لەبەر ئەوەی 5 هەرە گرنگتــرین زارشــتەکانی ماتمــاتیکی تێــدا کۆبــۆتەوە، ئەوانــیش: 1 کە دانەی بــێ لایەن لە کــرداری جــارانکردن. 0: دانەی بــێ لایەن لە کـرداری کـۆکردنەوە. :θ نەگـۆڕی ئـۆیلەر. i: ژمـارەی خەیـاڵی و نەگـۆڕی π** . ئەو نەخشــەیە کاتێـک دروسـت دەبێـت کە $y = \pi$، چونـکە $\sin \pi = 0$ ، $\cos \pi = -1$ واتە: $e^{i\pi} = \cos \pi + i \sin \pi$، لەمەوەش دەگەینە:

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

یەکێکـی تـر لەو دەرئەنجـامە هاوشـێوانەی دەسـتمان کەوتـووە ئەوەیە: لەبەر ئەوەی دەتــوانین $z = x + iy$ بەهــۆی مەوداوە بنووســین: $|z| = r$ کاتێــک r بــریتییە لە مەودای ژمــارە ئــاوێتەکە، وە گۆشــەکەمان θ، ئەوە واتــــــــە $z = r(\cos\theta + i \sin\theta)$ ، لەمەوەش دەگەیــــنەوە ئەوەی کە ژمارە ئاوێتەکان دەتوانین بەو شێوەیەش بنووسین $z = r\,e^{i\theta}$.

نەخشە ئاوێتەکان

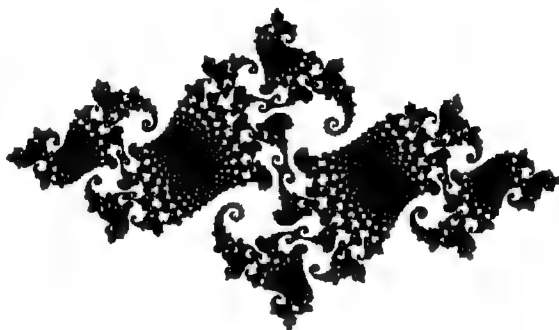
Complex functions

نەخشــە ئاوێتەکــان $f(z)$ هەر نەخشــەیە، بەڵام لە ژمــارە ئاوێتەکــان، واتە بــوارەکەی بــڕیتییە لە ژمــارە ئاوێتەکــان کاتێــک $z = x + iy$ لەبەر ئەوەی نەخشــەکە دەبێــتە نەخشــەیەکی ئــاوێتە، وە ژمــارە ئاوێتەکــان بەشــی ڕاســتی و بەشــی خەیالیــان هەیە، کەواتە نەخشــەکەش بەهەمــان شــێوە بەشــی ڕاستی و بەشی خەیاڵی دەبێت وە بەم شێوە دەنووسرێت:

$$f(z) = u + iv$$

دیــارە کە u بــڕیتییە لە بەشــە ڕاســتییەکە و v بــڕیتییە لە بەشــە خەیــاڵییەکە. لە ڕاســتیدا تیــۆری نەخشــە ئاڵۆزەکــان سەرســوڕهێنەرە لە بونیاتنــانی هەمــوو ئەنجامێــک کە تایبەتمەنــدە بە جیهــانی شــیکردنەوەی ئــاوێتە. ئەمەش لەبەر ئەوەیە کە نەخشــە لە ژمــارە ئاڵۆزەکــان z زۆر ســنوردارە، کە نەخشــەکە پێوســتە بەدەر لە بەکارهێنــانی ئــاوەڵی ژمــارەکە بنووســرێت z^* ، بــۆیە بەشــە ڕاســتییەکەی نەخشــە ئاڵۆزەکــان بەشــێک نیــیە لە نەخشــە ئــاڵۆزەکە. ئەوەی پێوســتە بیــزانین، ئەوەیە کە هەر ژمــارەیەکی ئــاوێتە بــۆ پیشــاندانیان بە شــێوەی ئەنــدازەیی، پێوســتی بە ڕووتەخــتە (لە بــابەتی پێشــتر باســمانکرد)، واتە ژمــارە ئاوێتەکــان لە ئــاهووتەی دووڕەهەنــدی پیشــاندەدرێت، لەکاتێــک گشــت ژمــارە ڕاســتییەکان تەنیــا لەســەر هێڵێــک واتە ئــاهوتەیەکی یەک ڕەهەنــدی وێنــادەکرێن. نەخشــە لە

ژمــارە راســتییەکان مەودایەکەی دیســانەوە ژمــارەیەکی راســتی بــوو، بەڵام لێــرە نەخشــە لە ژمــارە ئاوێتەکــان جــگە لەوەی بــوارەکەی لە ئــاهوووتەی دوو ڕەهەنــدی وێنــا دەکرێــت، ئەوە مەوداکەی وا بە ئاســانی وێــنە ناکرێــت، چــونکە بەشــێکی خەیــاڵی هەیە کە پێوســتی بە ئــاهووتەیەکی دوو ڕەهەنــدی هەیە، وە بەشــــە راســــتییەکەی ئەویــــش پێوســــتی بە ئــــاهووتەیەکی دووڕەهەنــدی هەیە! یەکێــک لەو پێکهــاتە هەرە جوانــانەی بەهــۆی نەخشــە ئاوێتەکــــان دروســــتکراوە: $c + z^2$ کە لە وێــــنەکە نیشــــاندراوە، کە خشــەتەیەک لە ژمــارە پیشــاندەدات کە ژمارەکــانیش دواهــاتوونە، ئەوە بەو شێوەیە دەوترێن کۆمەڵەی جولیا یان ژولیا-Julia set .



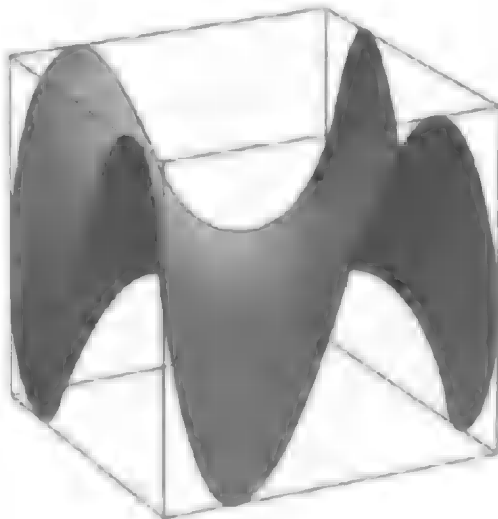
جیاکاریی ئاوێتە

Complex differentiation

لە بابەتی نەخشە لە ژمارە ڕاستییەکان باسی چۆنییەتی دۆزینەوەی داتاشراوەی نەخشەمان کرد، ئێستا کە نەخشەمان هەیە لە ژمارە ئاوێتەکان، بەهەمان شێوە داتاشراوەمان بۆ ئەوانیش هەیە، چۆنییەتی دۆزینەوەی داتاشراوەی نەخشە ئاوێتەکان هەر بە هەمان شێوازی دۆزینەوەی داتاشراوەیە لە نەخشە لە ژمارە ڕاستییەکان. بەڵام لەبەر ئەوەی وتمان بواری نەخشە ئاوێتەکان ئاهووتەیەکی دوو ڕەهەندییە، ئەوە جێبەجێکردنی پێناسەی داتاشراوە تۆزێک گۆڕانکاری بەسەر دێت، هەر بۆیە لەمەڕ ئەم پرسە چەند بیردۆزێک هەن کە ئاسانکاریمان بۆ دەکەن کە ئایا نەخشەیەکی ئاوێتە کەی جیاکاری لەسەر دەکرێت، ئەویش بەهۆی بیردۆزی **کۆشی-ریمان** (Cauchy-Riemann). واتە ئەگەر بێت و نەخشەیەک توانای داتاشراوەی هەبێت، ئەوە ئەگەر و تەنیا ئەگەر یاسای کۆشی-ریمان جێبەجێ بکات. بۆ نموونە ئەگەر $z = x + iy$ و $f(z) = u + iv$ ئەوە دەبێت $\frac{\sigma u}{\sigma x} = \frac{\sigma v}{\sigma y}$ و $\frac{\sigma u}{\sigma y} = -\frac{\sigma v}{\sigma x}$ بێتە دی. لەمەوەش دەگەینە ئەوەی کە U و V دوو نەخشەی هارمۆنین کە ئەمە جێ بەجێ دەکەن:

$$\frac{\sigma^2 u}{\sigma x^2} + \frac{\sigma^2 v}{\sigma y^2} = 0$$

ئەمەش هاوکێشـــەی لاپلاســـە کە خـــۆی لە زۆر هاوکێشـــەی فیزیـــای بیرکارییـــانە دەبینێـــتەوە. بـــۆ نمـــونە ئەگەر $f(z) = z^2$ ، ئەوە داتاشـــراوەی ئەو نەخشـــە ئـــالۆزە دەکـــاتە $f'(z) = 2z$. هەڵـــبەتە ئەم بیـــردۆز، لە پێناسە سەرەکییەکەی سەر ئاوکەتووە.

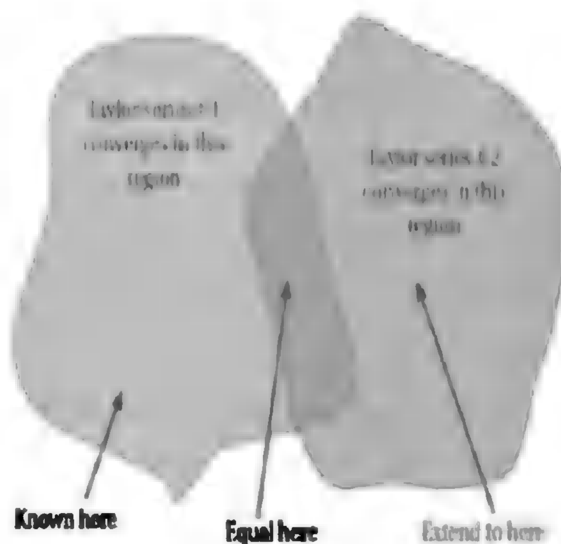


نەخشەی شیکاریی

Analytic function

نەخشـــەی ســـەلیقەدار-شـــیکاریی، بـــریتییە لەو نەخشـــە ئـــاوێتەی کە توانـــای داتاشـــراوی هەیە (چـــونکە لە هەمـــوو خاڵێـــک و لە هەمـــوو ئاییەرهودێـــک-دەوروبەری خاڵەکـــان بەردەوامە و کێشـــەی نیـــیە)، بـــۆ ئەوەشـــی کە لە هەمـــوو خاڵێـک داتاشـراوەکەی بـوونی هەبێـت، ئەوە پێوسـتە نەخشـــە ئـــاوێتەکە پاســـەدانی هاوکێشـــەی لاپـــلاس بکـــات، وە نەخشـــەکەش دەبێـــت پتـــر لە داتاشـــراوێکی بـــوونی هەبێـــت، واتە تەنیـــا داتاشـــراوەی یەکەم کـــافی نیـــیە. بەڵام لە ڕاســـتیدا لە نەخشـــە ئاوێتەکـــان ئەگەر هـــاتوو نەخشـــەیەک داتاشراوی یەکەمی هەبوو، ئەوە مەرج نییە داتاشراوە دووەمی هەبێت.

ئێســـتا وا دانـــێ دوو نەخشـــەی ئاوێتەمـــان هەیە، ئەوانـــیش f و g کە دوو نەخشـــەی ئـــاوێتەی شـــیکارین، هەریەکەیـــان لە زنجیرەیـــی تـــایلەر لێکترزیکبـــونەوەن لە نـــاوچەیەک لە ڕووتەختـــی ژمـــارە ئاوێتەکـــان ، ئەگەر بێـــت و ناوچەکـــان تـــێکەڵ بەیەکـــبن و $f(z) = g(z)$ لە نـــاو ئەو نـــاوچەیەی کە تێکەڵـــــی یەک بـــــوونە، ئەوەی دێـــــت $f(z) = g(z)$ ڕوودەدات لە هەرشـــوێنێکی تـــر. ئەم تەکنـــیکەی بەردەوامـــی شـــیکاریی؛ بەکاردێـــت لە شیکردنەوەی نەخشەی زیتای ریمان (Riemann zeta function).



بەردەوامبـوونی شـیکاریی: ئەم وێـنەی سـەرەوە دوو هەرێـم-نـاوچەی پێکـداچوو-تـێکەڵ دەنوێنێـت لە ڕووتەختـی ژمـارە ئاوێتەکـان. ئەگەر بێـت و زنجیـرەی تـایلەری نەخشـەیەک لێکنزیکبـووە بێـت لە یەکێـک لە ناوچەکـان، وە زنجیـرەی تـایلەری نەخشـەیەکی تـر بە هەمـان شـێوە لێکنزیکبـووە بێت لە نـاوچەکەی تـر، بەڵام ئەگەر دیتـرا ئەو دوو نەخشـەیە لە نـاوچە پێکـداچووە-تـێکەڵەکە یەکسـان بـوون، ئەوە هەردوو نەخشـەکە، نەخشـەی تـایلەر دەبـن لە سەر هەمان نەخشەی شیکاریی.

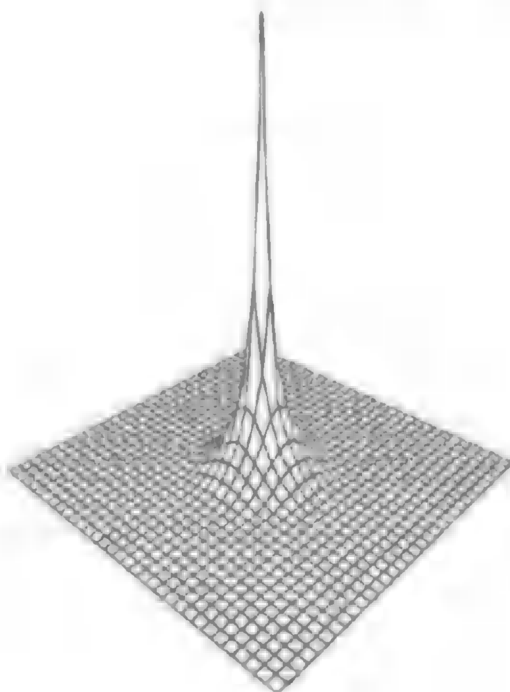
خاڵی تەڕایی

Singular points

خاڵی تەڕایی-تەکانە، ئەو خاڵەیە کە نەخشەیەکی ئاویتە تێدا پێناسەنەکراوە. خاڵی تەڕایی ئەگەر هات و لە نەخشەیەک بوونی هەبێت، ئەوە دەتواندرێت لابدرێت و کێشەکە چارەسەر بکرێت، ئەگەر هاتوو ئەو خالانە چارەسەر کران بەهۆی بەکارهێنان و نووسینی نەخشەکە بەهۆی زنجیرەی لورنت (Laurent expansion)، ئەوە ئەوکات نەخشە ئاویتە کێشەی تێدانامێنیت و دەبێتە نەخشەیەکی شیکاریی. زنجیرەی لورنت بەکاردێت بۆ دەربڕین و نووسینی ئەو نەخشە ئاوێتانەی کە شیکارەیی (Analytic) نین، واتە ئەو نەخشە ئاوێتانەی کە ناتواندێت بەهۆی زنجیرەی تایلەر بنووسرێت، جۆرێکی خاڵی تەڕایی پێی دەوترێت جەمسەری (Pole) ئەگەر بێت ئەم شێوەی هەبێت $\frac{1}{(z-z_0)^n}$ کاتێک $n > 0$ ، بۆیە بە شێوەیەکی بنچینەیی بۆ لەو خاڵەی کە نەخشە ئاویتەکە کێشەی هەیە، مەبەستمان جۆری Pole، ئەوە زنجیرەی لورنت لە ناکۆتا رادەی توانی نەرێنی دەگرێتەخۆی. زنجیرەی لورنتیش بۆ ئەو جۆرە خالە ئەوەیە:

$$f(z) = \frac{a_{-n}}{(z-z_o)^n} + \cdots + \frac{a_{-1}}{z-z_o} + a_1 + a_1(z-z_{\blacksquare})$$

بە کورتی و پوختی: زنجیرەی لورنت بۆ ئەو نەخشە ئاوێتانە بەکاردێت کە نەخشەیەکی شیکارەیی نییە، واتە کە ناتواندرێن بە زنجیرە باوەکەی تایلەر بنووسرێت، چونکە لە خاڵێک یان چەند خاڵێک کێشەی تێدەکەوێت. ئەمەش بەکاردێت بۆ دروستکردنی شتێکی نوێ، کە ناسراوە بە ڕووەکانی ڕیمان (Riemann surface).



ڕووەکانی ڕیمان

Riemann surfaces

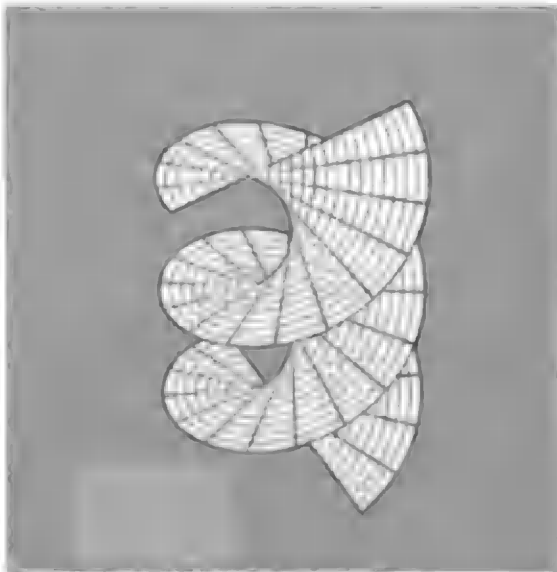
ڕووەکـــانی ڕیمـــان، ڕوویێکـــن کاتێــک نەخشـــەیەکی فـــرە بەهـــا لە ڕووتەختــی ئـــاوێتە دەبێــتە نەخشـــەیەکی تـــاک بەهـــای لە ســـەر ڕووەک. واتە ئەو نەخشـــەیەی کە بـــۆ هەر خاڵێــک لە بـــواری نەخشـــەکە، بە چەنـــد خـــاڵێکی تـــری مەودای نەخشـــەکە بەســـتراوەتەوە، لەکاتێــک نەخشـــەی تـــاک بەهـــا بـــۆ هەر خاڵێــک لە بـــوار، تەنیـــا بە یەک خـــاڵ بەســـتراوەتەوە لە مەودا. لۆگـــاریتمی سروشـــتی، $ln\,(z)$ ، لە ژمـــارە ئاوێتەکـــان، کاتێـــک $z = |z|e^{i\theta}$ بـــریتییە لە: $ln(|z|) + i\theta$ ، جۆرێکە لە نەخشە فرە بەهاکان:

$$ln(z) = ln(|z|) + i\theta$$

بەڵام لەبەر ئەوەی $e^{2i\pi} = 1$، بە بەکارهێنـــانی هاوئەنجـــامی ئـــۆیلەر ، ئەوە $a = |z|e^{i(\theta+2\pi)}$ ، بـــــــــــــۆیە لەمەوەش دەگەیـــــــــــــنە $ln(z) = ln(|z|) + i(\theta + 2\pi)$. لە ڕاســـــتیدا، $e^{2ki\pi} = 1$ بـــۆ هەمـــوو ژمـــــارەیەکی تەواوی k ، بـــــۆیە $ln(z) = ln(|z|) + i(\theta + 2k\pi)$ بـــۆ هەمـــوو ژمـــارەیەکی تەواو k ڕوودەدات، ئەوەش نەخشـــەیەکی فـــرە بەهـــای ئـــاوێتەیە (Multivalued function) . نمـــونەیەکی تـــر جیـــاواز لەمە، بریتییە لە ڕەگی دووجای z : $\sqrt{z}$

یەکێــک لە ڕووەکـــانی ڕیمـــان کە لەم وێـــنەی خـــوارەوە نیشـــاندراوە، نەخشـــە فـــرە بەهـــایەکەی؛ لۆگـــاریتمی سروشـــتییە، کە فـــرە بەهـــا

سروشتییەکانی سەردراوەتەوە بەهۆی جیاکردنەوەی لقە جیاوازەکانی لۆگاریتمەکە. ئەگەر بێت و بە دەوری ستونی ناوەندەکەیەوە بجولێین بە یەکفرە-خول، واتە 2π، ئەوە ناگەڕێنەوە هەمان شوێنی خۆمان، واتە ئەو شوێنەی لێیەوە دەستمان بە جوولە کرد، وەک چۆن لە ڕووتەخت دەگەینەوە هەمان شوێنی خۆمان، بۆیە ئەمە وا لە لۆگاریتم دەکات ببێتە نەخشەیەکی تاک بەها لە سەر ڕووەک. تیۆرییە گشتییەکەی ڕووەکانی ریمان پیشانی دەدات کە چۆن نمونەی زیاتر و ئاڵۆزتر دروستدەکرێت لە سەر ڕووتەختی ژمارە ئاوێتەکان بۆ دروستکردنی نەخشە تاک بەها لێکجیاوازەکان.



نواندنی یەکێک لە ڕووەکانی ریمان

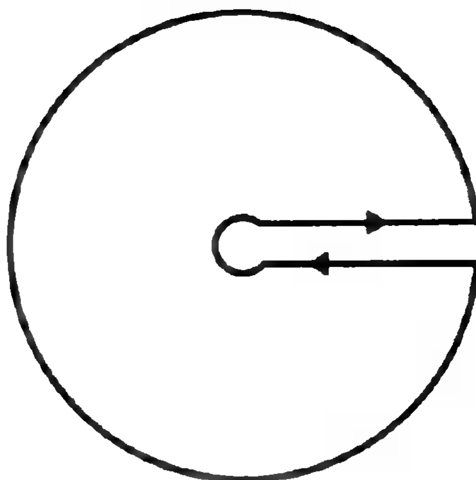
تەواوکاری ئاوێتە

Complex integration

وەک چۆن داتاشراوەمان هەبوو لە مەڕ نەخشە ئاوێتەکان، بە هەمان شێوە تەواوکاریشمان هەیە لە هەمبەر نەخشە ئاوێتەکان. تەواوکاری نەخشە ئاوێتەکان بە درێژایی ڕێڕەوی-path لە ڕووتەختی ژمارە ئاوێتەکان لەگەڵ تەواوکاری هێڵی پێکدەچن، بەڵام لە باری ئاهووتەی دوو ڕەهەندی. تەواوکاری نەخشە ئاوێتەکان ئەنجامی سەرسوڕهێنەرمان دەداتێ کاتێک تەواوکاری لە هەمبەر چەماوەیەکی داخراو دەدۆزینەوە.

بۆ نمونە، تەواوکاری نەخشەی شیکارەیی ئاوێتەکان (Analytic function)، واتە ئەو نەخشانەی لە هەموو ڕووتەختی ژمارە ئاوێتەکان توانای داتاشراوی هەیە و بەردەوامن، ئەوا تەواوکارییەکەی دەکاتە سفر لە دەوری چەماوەیەکی داخراو (بەهۆی بیردۆزی کۆشییەوە). هەروەها دەتوانین تەواوکاری بۆ ئەو نەخشانەش بدۆزینەوە کە بەهۆی زنجیرەی لورنت نووسراون، واتە ئەو نەخشانەی لەخاڵێک یان لە چەند خاڵێک کێشەیان هەیە، بۆیە لەو زنجیرەیە تەواوکاری سەرجەم بەشە شیکارییەکان دەکاتە سفر، بەڵام جگە لەو بەشەی کە ئەو خاڵەی لەخۆگرتووە کە کێشەی بۆ نەخشە بنەرەتییەکە دروستکردووە pole واتە Z^{-1} . بۆ چارەسەری ئەمەش ئەوەیە کە تەواوکاری ئەو ڕادەیە دەکاتە $ln\ (z)$. گۆڕانکاری لە $ln\ (z)$ بە دەوری چەماوەیەکی داخراو کاتێک

گۆشـــەکە بە 2π دەجولێنــدرێت، ئەو▪ دەکــاتە $2\pi\, i$، بــۆیە ئەوەی دەســـتمان دەکەوێـــت بـــریتییە لە $2\pi i\ a_{-1}$. ئەو کـــۆلکەیە a_{-1} ، پێـــی دەوترێـــت نیشــتوو-کــتن (residue) ، بــۆیە تەواوکــاری نەخشــە ئــاوێتەکە بە دەوری چەمــاوە داخــراوەکە دەکــاتە: $2\pi\, i$ لێکــدانی کــۆی نیشــتووەکانی نەخشـــەکە بەهۆی چەماوە داخراوەکە.



چەمـــــاوەیەکی نمـــــونەیی لە تەواوکـــــاری نەخشـــــە ئاوێتەکـــــان لە ڕووتەختــی ژمــارە ئاوێتەکــان، بــۆ هەژمــارکردنی تەواوکــاری نەخشــەیەکی ڕاستی بەهۆی میتۆدی تەواوکاری ژمارە ئاوێتەکانەوە دەنوێنێت.

کۆمەڵەی ماندێلبرۆت

The Mandelbrot set

کۆمەڵەی ماندێلبرۆت[89] بریتییە لە کۆمەڵەیەک لە ژمارە ئاوێتەکان کە لە ئەنجامی لێکۆڵینەوەی سیستەمە جوڵەدارەکان (Dyanamical system) سەرهەڵدەدات. ئەو کۆمەڵەیەش فرکتاڵێک پێکدێنن. کۆمەڵەی ماندێلبرۆت لەگەڵ ئەوەی زۆر جوان و سەرنج ڕاکێشە، بەڵام پێکهاتەیەکی زۆر قوڵ و ئاڵۆزی هەیە. وتمانە ئەو کۆمەڵەیە بریتییە لە ژمارە ئاڵۆزەکان C کاتێک لە خاڵی بنەڕەت $z_0 = 0$ نەخشەی $z_{n+1} = C + z_n^2$ لێکدوورکەووە نەبێت (Diverge) کاتێک ئەو نەخشەیە دووبارە و دووبارە دەکرێتەوە بە جێگرکردنی نرخێک $z_1 = c$ و بەگۆڕانی z لە نەخشەکە. ژمارەیەکی ئاڵۆز لە ژێر کۆمەڵەی ماندێلبرۆت، زانیاریمان دەداتێ لە هەمبەر کۆمەڵە جوولیاکەی. وێنەی کۆمەڵەی ماندێلبرۆت کە لە خوارەوە نیشاندراوە، وێنەیەکی دروستکراوی ژمارەییە بەهۆی پێدانی چەندین نرخ بە C. سنوورەکانی کۆمەڵەی ماندێلبرۆت، وەکوو چەماوەیەکی داخراوە، کە ڕووکارەکەی فراکتاڵە. کۆمەڵەی ماندێلبرۆت یەکەم جار لەلایەن ماتماتیکزانێک بە ناوی "پێتەر فاتۆ" کە لە بواری شیکاریی ئاوێتەدا کاری دەکرد لە ساڵی 1905 پێناسە کرا.

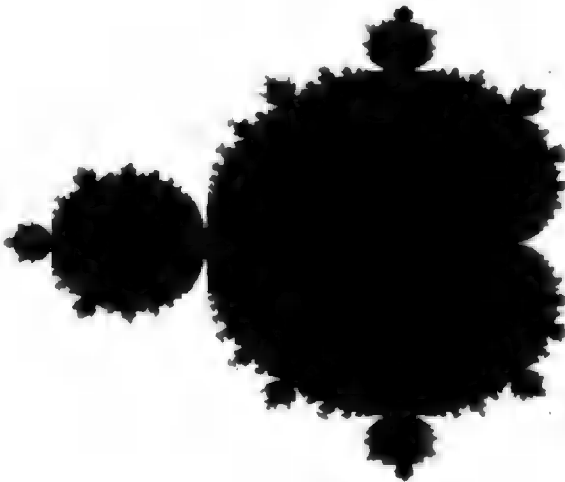
---

[89] بێنویت ماندلبرۆت (1924 – 2010) ماتماتیکناسێکی داهێنەر بوو کە لە کۆمپانیای ئای بی ئێم زانا بوو، بە بابی جیۆمەتری فراکتاڵ ناسراوە. ئێستا ئەم زانستە ماتماتیکیە لە بوارەکانی ئابوری، بورسە، ئەستڕۆنۆمی و کۆمپیوتەردا بەکاردێت. (شێرکۆ ڕەشید قادر).

هاوکات ماتماتیکزانیکی تر بە ناوی 'ژولیا' فانکشنە ڕیژەییەکانی لەسەر ڕووتەختی ئاوێتەدا تاوتوی دەکرد. ئەمڕوکە کۆمەڵەکانی ژولیا-جولیا لە فراکتاڵە هەرە ناسراوەکانن. ئەم تویژینەوانە بە شیوەیەکی پرش و بلاو لە ئارادابوون هەتا ساڵی 1979 ، کە 'بینویت ماندیلبروت' لە وتاریکدا:

(Fractals: Form, chance and dimension)

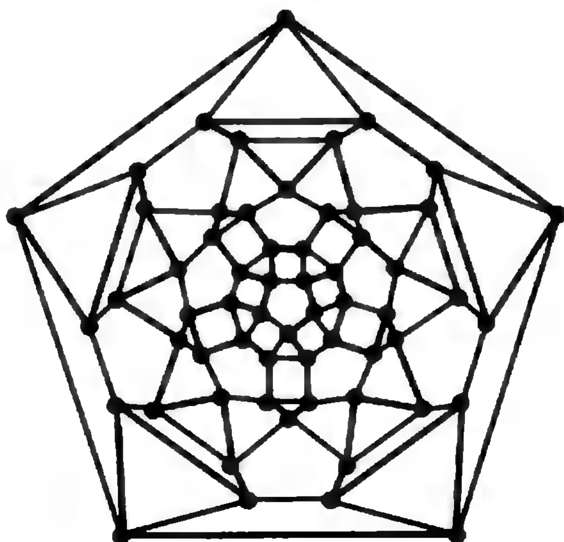
ئەم چەمکانەی لەگەڵ زور بابەتی تر لەژیر ناوی ئەندازەی فراکتاڵ پیشکەش کرد.



بەشی دەیەم

سازان

Combinatorics



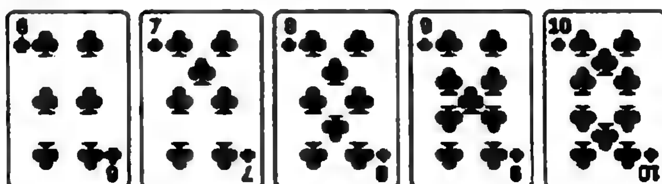
تیۆری سازان

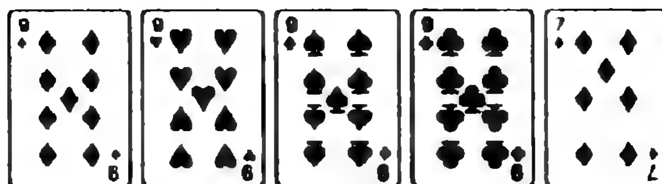
Combinatorics theory

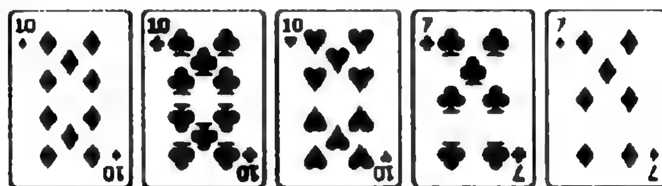
تیـۆری ســازان، یەکـێکە لە لقەکـانی بیرکـاری کە مـامەڵە لەگەڵ ژمـاردن دەکــات. وەک یاریزانەکـــانی یـــاری پـــۆکەر، کە بە هزریـــانە ئەگەرەکـــان لێکـدەدەنەوە بـۆ یاریزانەکـانی بەرامبەریـان کە ئایـا دەکرێـت ئەو کـاخەزەی لە نـــاو دەســـتیتیدا چیـــی بێـــت. تیـــۆری ســـازان دەربـــارەی دۆزیـــنەوەی ژمـــارەی شـــتەکانە (objects)، وە یـــان ئەگەری ڕوودانـــی ڕووداوێـــک، بەبـــێ هەبوونی خشتەی هەموو دەرئەنجامە جیاوازەکان.

ســـازان بـــابەتێکی گـــرنگە و بگـــرە بە دڵـــی زۆرێـــک لە بـــابەتی گرنگـــی وەک: تیـــۆری ئەگەر، ئۆپتیمازیەشـــن و تیـــۆری ژمارەکـــان ناســـراوە. واتە ئەمە زیـــاتر وەک هونەرێـــک وایە، هەروەهـــا نەگـــۆڕ و ژمـــارەی ئـــۆیلەریش دەگـرێتە خـۆی لە هەنـدێک ڕووەوە. دەســـت و پەنـــجەی "کـــارل گاوســـی" لەو لـــــقەی بیرکـــــاری شـــــوێنی هەیە، کە بەم دوایـــــانەش پـــــۆل ئیـــــدروارس (Paul Erdös) کاری تێدا کردووە.

لە کۆنـــدا تیـــۆری ســـازان وەســـف دەکـــرا وەک نیزامێـــک بەبـــێ بـــوونی تیـــۆرییەک، واتە تەنیـــا ڕەنگـــدانەوەی چەنـــد تەکنینـــک و میتۆدێـــک بـــوو، بەڵام دواتـــر گـــۆڕانی بەســـەرداهاتوو و پێشـــکەوت ، تـــا گەیشـــتە ئەوەی کە ئێســـتا هەیە.





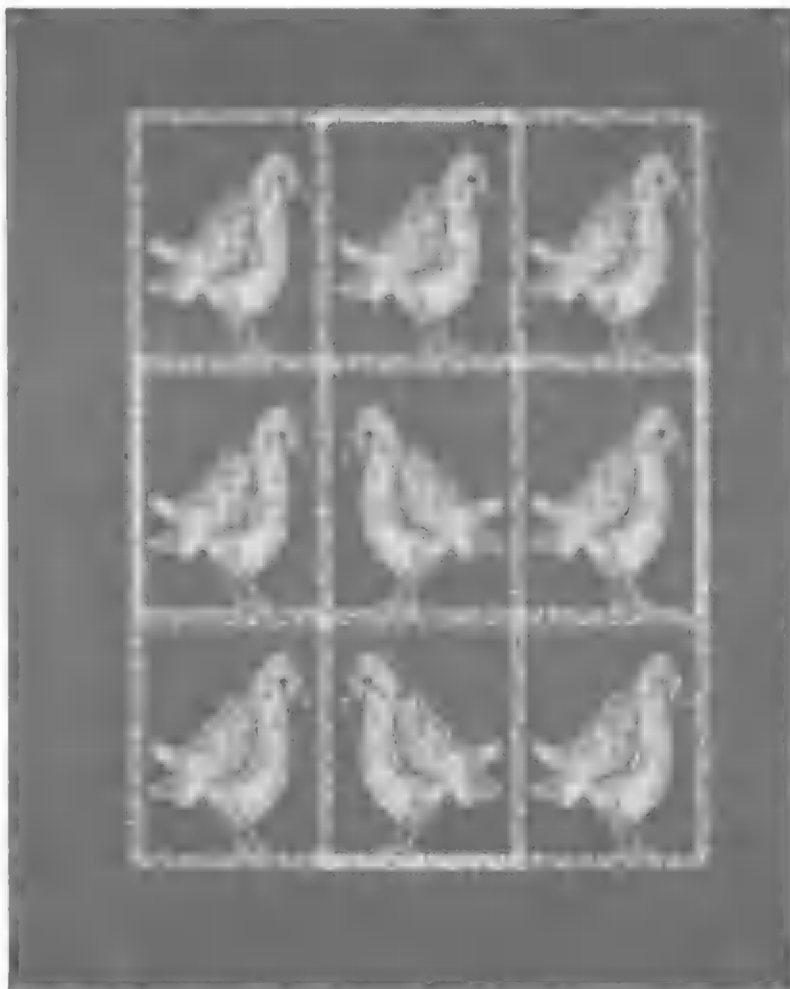


ڕێسای هێلانەی کۆتر

The pigeonhole principle

ڕێسای هێلانەی کۆتر؛ بیرۆکەیەکی سادە، بەڵام گرنگییەکی زۆر لە زۆر بواردا. وا بێنە پێش چاوت کە 101 کۆترت هەیە، ئەگەر بێت و تەنیا 100 هێلانەت هەبێت بۆ ئەوەی هەر کۆتر و لە هێلانەیەک دابنێی، ئەوە دیارە دەبێت یەکێک لەو هێلانانە دوو کۆتری تێدا دابنێی! واتە ئەگەر هات و ژمارەی کۆترەکان لە ژمارەی هێلانەکان زیاتر بوو، ئەوە بەلایەنی کەم هێلانەیەک هەیە کە دوو کۆتر لەخۆ دەگرێت، بە زمانە بیرکارییەکە، ئەگەر بێت و n خانەت هەبێت و m شتت هەبێت، کاتێک $m > n$ ، ئەوە بە لایەنی کەم خانەیەک زیاتر لە شتێک دەگرێتە خۆی. ئەو ڕێسایە دەکرێت لە زۆر بارودۆخ بەکاربێت و جێبەجێ بکرێت. بۆ نموونە ئەکرێت بەهۆی ئەو ڕێسایە شتێک بسەلمێنیت ئەویش، ئەگەر شارێک 1,000,000 کەسی نا-کەچەڵ هەبن، ئەوە بەلایەنی کەم دووکەس هەن کە هەمان ژمارەی تاڵە مووی سەریان هەیە، واتە ژمارەی تاڵە مووەکانی دووکەسی ئەو شارە وەک یەکن. ڕاستی ئەمەش لەوەوە سەرچاوی دەگرێت کە کەسێکی ئاسایی نزیکەی 150,000 تاڵە مووی لەسەری هەیە، وا دانێ کەسێک ئەگەر مووەکانی سەری زۆر زۆرەکەی 900,000 بێت، بۆیە ئێستا 1,000,000 کەسمان (شت) هەیە m ، وە 900,000 ئەگەری تاڵە مووەکانی سەیری کەسێکە (خانە) بۆیە دەبینین کە $m > n$، واتە ژمارەی دانیشتوانەکە زیاترە لە ژمارەی مووەکانی سەری کەسێکی ئاسایی، بۆیە

لە ڕێگـــای ئەم ڕێســـایەوە دەگەیـــنە ئەوەی کە دوو کەس هەن بە دڵنیـــایی ژمارەی تاڵە مووەکانی سەریان هێندەی یەکە.



بیردۆزی گرین-تاو

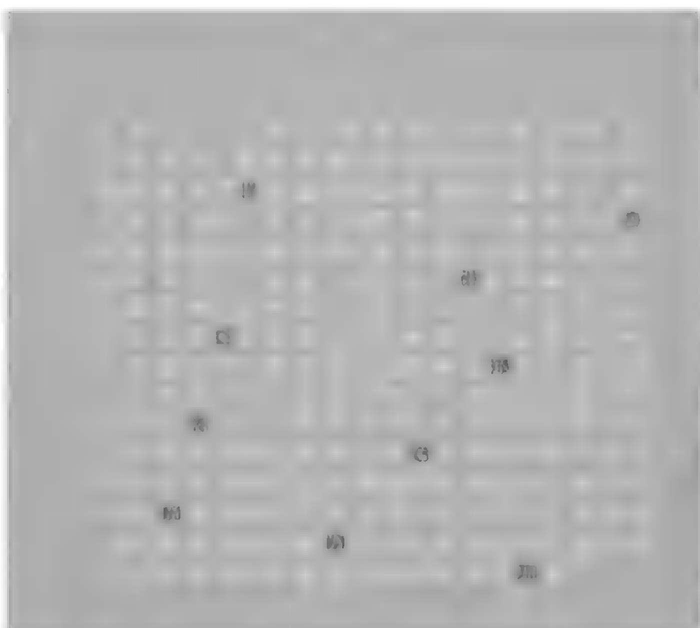
The Green-Tao theorem

بیـــردۆزی گـــرین- تـــاو، ســـەر بە تیـــۆری ژمارەکـــانە کە لە لایەن هەردوو بیرکـــاریزان "گـــرین و تـــاو" لە ســـاڵی 2004 ســـەلمێندار. دەقـــی **بیـردۆزەکە دەڵێـت: لە نـاو کـۆمەڵەی ژمـارە خۆبەشـەکان، دەکرێـت دەسـتە- پـــۆلە ژمـــــارەیەکی خۆبەشـــــی یەکـــــبەدوای یەک (progressions) بـدۆزرێتەوە، کە مەرجـیش نیـیە ئەو دەسـتە ژمـارە خۆبەشـە بە دوای یەکەوە بـن.** واتە ئیسـتا بـۆ ژمارەکـانی 3،5،7 دیـارە ئەم سـێ ژمـارەیە کە خۆبەشـــن و جیـــاوازی نێـــوان تەنیـــا دوو یەکەیە، واتە ئەو ســـێ ژمـــارەیە بەیەکەوە ڕیســـایەکیان هەیە (یەکـــبەدوای یەکێکیـــان هەیە). بـــۆ ژمارەکـــانی تـــری وەک: 5،11،17،23،29 بـۆ ئەو چەنـد خۆبەشـە، دیسـانەوە ڕیسـایەکی تـر هەیە، کە ئەم ڕیسـایە تەنیـا بـۆ ئەو چەنـد ژمـارەیە لەبـارە، ڕیسـاکەش ئەوەیە کە لە 5 دەسـت پێـدەکات، دواتـر ژمـارەی بەدەسـت هـاتوو لەگەڵ 6 کۆدەکرێتەوە، بەم شێوەیە:

$$5, 5+6=11, 11+6=17, 17+6=23, 23+6=29$$

لێـــرەوە ئەم ڕیســـایە زیـــاتر کارناکـــات. بـــۆیە ئەو یەکـــبەدوای یەکە کورتـــانە لە نـــاو ژمـــارە خۆبەشـــەکان لە مێـــژە زانـــراوە، بەڵام پێشـــتر تەنیـــا

کۆنجێکتەرێک[90] بووە، تا 'گرین و تیۆ' سەرکەوتووانە ئەم پرسەیان لە 2004 یەکلا کردەوە لە دەڤەری سیستەمە جوڵەدارەکان و تیۆری ژمارەکان.



کۆنجێکتەر دەقێکە، بۆنی راستی لێدێت، بەڵام لەگەڵ ئەوەش هیچ سەلماندنێک راستی پرسەکەی یەکلا نەکردۆتەوە. کۆنجێکتەر کە سەلمێندرا، دەبێتە بیردۆز.

پردەکانی کونیگسبرگ

The bridges of Königsberg

یەکێـک لە کێشـە هەر گەورەکـانی سـەدەکانی رابـردوو، بریتیبـوو لە کێشـەی حەوت پـردەکەی کونیگسـبرگ. ئەو کێشـەیە بـووە هـۆی ئەوەی کە لقێکی نـوێ لە بیرکـاری سـەرئاو بکەوێت بەنـاوی تیۆری هێڵکـاری- Graph theory. لە سـەدەی هەشـدەهەم، لە شـارۆچکەی کونیگسـبرگ لە بروسـیا کە دەکـاتە کـالینینگرادی ئێسـتای رووسـیا، حەوت دانە پـرد لە نزیکـی یەکتـر هەبـوون، کە ئەو پـردانە چـوار پـارچەی ئەو ناوچەیـان بەیەکدەگەیانـد، کە بەهـۆی رووبـار لە نێـوان ئەو پـارچە خاکـانە، ئەو 7 پـردە دروسـتکرابوون. پرسـیارەکە ئەوە بـوو: **دەکرێـت بەسـەر هەر حەوت پـردەکە برۆیـت، بەڵام دوو جـار بەسـەر هـیچ پردێـک نەڕۆیـتەوە؟** بە واتـایەکی: ئەگەر هەر پردێـک بـۆت هەبێـت یەکجـار بەسـەریدا برۆیـت، ئەوە دەتـوانی هەر حەوت پـردەکە ببڕیـت؟ ئیتـر دەتـوانی و نـاتوانی مقۆمقـۆی زۆر و تـاقیکردنەوەی زۆر نەبـووە هـۆی ئەوەی ئەو پرسـیارە بە شـێوەیەکی ورد وەڵام بـدرێتەوە، وە بیرکـردنەوەی لـێ ئاسـان نەبـوو، بەڵام تـا سـاڵی 1735 بیرکـاریزان لیۆنـارد ئـۆیلەر (Leonhard Euler) سـەلماندی کە ئەوە مەحـاڵە! واتە نـاتوانی هەر حەوت پـردەکە ببڕیـت بـێ ئەوەی هـیچ پردێـک دووبـارە نەکەیـتەوە. بە شـێوەی پەتـی (Abstract) دەکرێـت بڵـێین، هەر یەکێـک لە پـارچە خاکەکـان بـریتین لە سـەرێک (Vertex) یـان خاڵێـک(Point) ، ئەو خـاڵانە بەهـۆی راسـتەهێڵەوە-لێـوار بەیەک بەسـتراونەتەوە (Edge)، کە پردەکـان دەنـوێنن،

واتە ئێستا پارچە خاکەکان بریتین لە چەند سەرێک و پردەکان بریتین لە ڕاستەهێڵی نێوان خاڵەکان، بەڵام لێرە دووری (Distance) کارمان پێی نییە و گرنگی پێنادەین. بۆیە بیرۆکەی نەخشە و GPS لەسەر ئەم لقەی بیرکاری دامەزراوە، کە شوێنی تۆ لە نەخشەکە بە خاڵێک پیشاندەدرێت، کە ئەو شوێنەی تۆ دەتەوێت بۆی بچیت بە ڕاستەهێڵ یان بە چەماوە (curve) پیشان دەدرێت. جگە لەمەش لە دیزاین کردنی تۆڕەکانی ئاو و کارەبا و دروستکردنی خەریتەی ئامێرەکان، گشتیان سوود لە تیۆری هێڵکاری-گراف وەردەگرن.

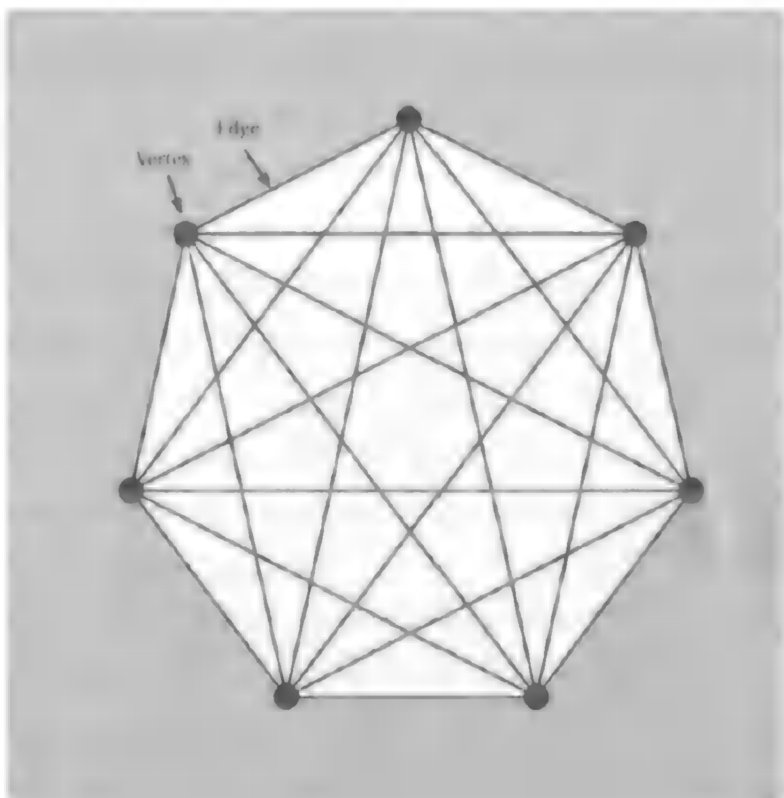


تیۆری هێڵکاری-گراف

Graph theory

تیـــۆری هێڵکـــاری، بـــریتییە لە لێکـــۆڵینەوە لە هەمـــبەر پێکگەیانـــدن (بەســـتنەوە). بە پـــێچەوانەی هێڵکـــاری نەخشـــەکان کە پێشـــتر باســـمان کـــردووە، لێـــرە هێڵکارییەکـــان لە کۆمەڵێـــک خـــاڵ-ســـەر(Vertex) و هێـــل (Edge) پێکهـــاتوون، کە هێڵەکـــان خاڵەکـــان بەیەکەوە دەبەســـتنەوە. چەنـــد ســـەرێکی یەکـــبەدوای یەکەکە بەهـــۆی هێڵەکـــانەوە بەیەکەوە بەســـتراونەتەوە، پێـــی دەوترێـــت ڕێچـــکە (Path). تیـــۆری هێڵکـــاری دەرگـــایەکە بـــۆ چارەســـەرکردنی زۆر کێشـــە، وەک چـــۆن لە بـــابەتی پێشـــوو کە کێشـــەی پردەکـــان بەهـــۆی تیـــۆری هێڵکـــارییەوە چارەســـەرکرا. هەنـــدێک جـــۆری هێڵکـــاری بنەهێڵکـــاری (Subgraph) لەخـــۆی دەگرێـــت، بنەهێڵکـــاریش هەر هێڵکـــارییەکە لە نـــاو هێڵکـــارییەکی تـــر. هەر لە تیـــۆری هێڵکـــارییەوە دەگەیـــنە دەرئەنجـــامی زۆر سەرســـوڕهێنەر، وەک یاســـای ئـــۆیلەر لە هەمـــبەر چەنـــد ڕووەکـــان، کە ئەم ڕیســـایە پەیوەنـــدییەکی تـــۆکمە لە نێـــوان تیـــۆری هێڵکـــاری و لقێکـــی تـــری بیرکـــاری دەردەخـــات، ئەویـــش شوێنناســـی (Topology). تیـــۆری هێڵکـــاری کۆمەڵێـــک جـــۆری لـــێ دەبێـــتەوە، کە دەتوانـــدرێت کردارەکـــانی وەک: ئـــاوێتە کـــردن، یەکگـــرتن... ئەمـــانە لەخـــۆ بگرێـــت، بـــۆ نمـــونە ئەگەر دوو هێڵکـــاری یەک بگـــرن چـــی بەســـەر دێـــت، وەیـــان ئەگەر دوو هێڵکـــاری ئـــاوێتەی یەکتربکـــرێن چیـــان بەســـەر دێـــت. ئەم لـــقە تەنیـــا بیرکارییەکـــان پێـــی ئاشـــنا نـــین، بەڵکـــو فیزیکزانەکـــان، کیمازانەکـــان، زیندەوەرناســـەکان ئەوانـــیش ئاشـــنای ئەم

تیۆرییەن، چونکە لە فیزیا و کیمیا، بۆ نواندنی بەندە ئایۆنییەکانی مادەیەک بەکاردێت، کە ئەمانە گشتیان بەهۆی تیۆری هێلکارییەوە لیان تێدەگەین. نموونەی دیکە؛ ئینتەرنێت و بڵاوبوونەوەی بە نێو شار و شارۆچکەکان، ئەمانە گشتیان لە ڕێگەی ئەم تیۆرییەوە گەشەی پێدەدرێت.



بیردۆزی چوار ڕەنگەکە

The four-color theorem

بیــــردۆزی چـــوار ڕەنـــگەکە، یەکـــێکە لە بیـــردۆزە هەرە جوانەکـــانی بیرکـاری کلاسـیکی. کە دەقـی بیـردۆزەکە دەڵێـت: **کەمتـرین ژمـارەی ڕەنـگ کە پێوسـتە بـۆ ڕەنگردنـی نەخشـەیەک، بەو مەجەی هـیچ دوو نـاوچەیەکی تەنیشت یەک هەمـان ڕەنـگ وەرنەگـرن، ئەوە بەلایەنـی کەم چـوار ڕەنگمـان پێوسـتە.** واتە ئەگەر بێـت و بمـانەوێ گەڕەکەکـانی شـاری هەولێـر لەسـەر نەخشـە تەنیـا بە ڕەنـگ لێکیـان جیـابکەینەوە و هـیچ دوو گەڕەکێکـی تەنیشـت یەک هەمـان ڕەنـگ وەرنەگـرن، ئەوە بەلایەنـی کەم چـوار ڕەنگمـان پێوسـت دەبێـت. وەک لە وێـنەکە دیـارە. دووبـارە دەتـوانین ئەم باسـە لە ڕێـگەی تیـۆری هێڵکـاری دابڕێـژین و شـیکردنەوە و سـەلمینەی بـۆ بکەیـن، ئەویـش هەر نـاوچەیەک بە سـەرێک (vertex) دابنـێن، وە نابێـت هـیچ دوو سـەرێکی دراوسـێ هەمـان ڕەنگیـان هەبێت، کاتێـک ئەو سـەرانە بەهـۆی هـێڵەوە پێکەوە بەسـتراونەتەوە و سـنورێک دروسـتدەکەن. هەر وەک گرفتێـک شـیکردنەوەی گەلێـک کێشـەی لەم شـێوە، وامـان لێدەکات هانـا بـۆ کۆمپیـوتەر بەریـن و لەوێ سـەیری ڕووداوەکـان بکەیـن. لە سـاڵی 1980 دووکەس بەناوەکـانی "کینس ئەپیل و ولفگانـگ هـاکین" (Kenneth Appel and Haken Wolfgang) ئەو ڕاسـتییەیان پیشـاندا بەهـۆی بەکارهێنـانی کۆمپیـوتەرەوە بـۆ پشـکنینی هەر یەک لە 2000 یـان زیـاتر بـاری شـاز و

جیــاواز. دواجــار ســـەلماندنە فۆرمـــاڵەکەی لە ســـاڵی 2005 یەکلابـــۆوە و ئەو پرسە بەکۆتایی گەیشت.

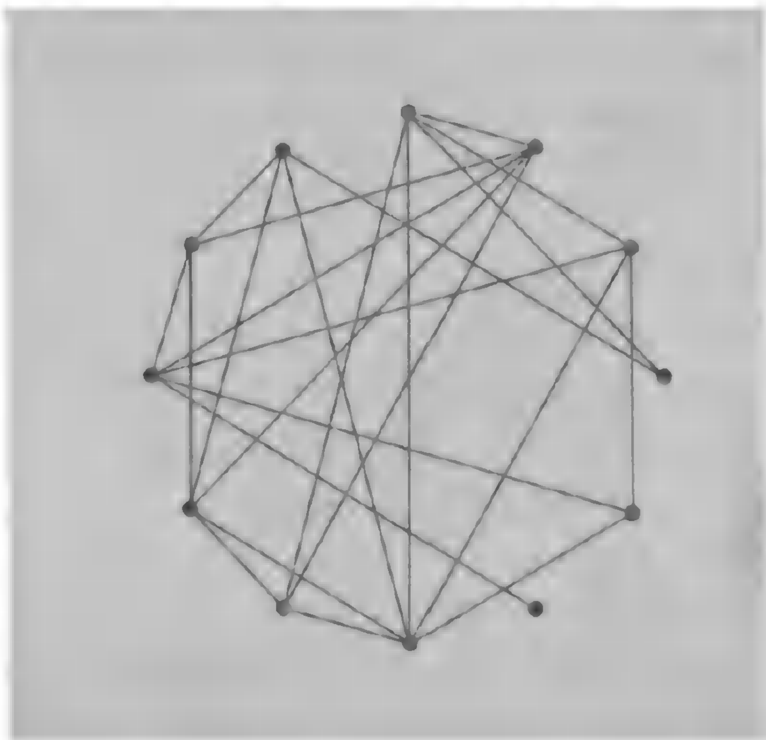


هێڵكارییە هەڕەمەكییەكان

Random graphs

هێڵكـــارییە هەڕەمەكییەكـــان (لە گـــۆترە) یەكـــێكە لەو هێڵكارییـــانەی كە ئەو هـــێڵەی ســـەرەكان بەیەكەوە دەبەســـتێتەوە، بە شـــێوەیەكی هەڕەمەكـــی دابەشـــكراون بـــێ هـــیچ مەبەســـتێك. بـــۆ دروســـتكردنی هێڵكـاری لەم شـــێوەش، وادانـــێ كـــۆمەڵەیەك لە ســـەرمان هەیە N، بـــۆ هەر دووســـەرێك لەو كـــۆمەڵەیە هێڵێـــك دەكێشـــین بە ئەگەری P یـــان ئەگەری نەبـــوونی هـــیچ هێڵێـــك لە نێـــوان ســـــــەرەكان بە ئەگەری 1-P. بە شـــــــێوەیەكی تـــــــایبەتی، لە هێڵكـــــــاری هەڕەمەكـــــی، هەمیشـــــە ڕێچـــــكەیەك هەیە كە هەر دوو ســـــەرێك بەیەكەوە دەبەســـتێتەوە، بـــۆیە بەو جـــۆرە هێڵكـــارییە دەوتـــرێن هێڵكـــاری پێكەوەلكـــاو (Connected graph). هەروەهـــا ئەگەر دوو كـــۆمەڵەی كۆتادارمـــــان هەبێـــت، هەر كـــۆمەڵە و چەنـــد ســـەرێكی تێـــدا بێـــت، ئەوە ســـەرێك هەیە كە بەهەمـــوو ســـــەرەكانی نـــاو یەكێـــك لە كۆمەڵەكـــان بەســـتراوەتەوە كە بە كـــۆمەڵەكەی تـــر نەبەســـتراوەتەوە. ئەوە ڕێگـــایە كە هێڵكـــاری هەڕەمەكـــی بە شێوەیەكی نمـونەیی پەرە دەســـەنێت و دروســـت دەبێت، لەگەڵ ئەوەش، تـــا N زیـــاتر بێـــت، ئەوە ســـەرنج ڕاكێشـــتر دەبێـــت، بە پـــێچەوانەوە تـــا N بچـــوكبێتەوە، ئەوە هێكـــارییەكە و بەشـــەكانی بچـــوك دەبێـــتەوە و هـــیچ خولێـــك لە هێڵكـــــارییەكە بـــــوونی نابێـــــت. لێـــــرە ڕێگەیەكـــــی كـــــورت هەیە لە مەڕ تایبەتمەنـــدی لكـــاوەیی (connectivity)، ئەویـــش ئەگەر p بچـــوكتر بێـــت لە

$\frac{ln(N)}{N}$، ئەوە ســــەرێکمان دەبێـــت لە هێڵکـــارییەکە کە بە هــیچ ســـەرێک نابەستریتەوە (Isolated vertex).



بەشی یازدەهەم

ئاهووتە و تۆپۆلۆجی

Space and Topology



ئاهووتە مەترییەکان

Metric spaces

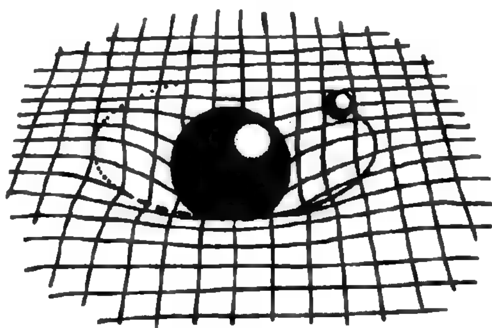
ئـاهووتە مەترییەکـان، بـریتییە لە یەکێـک لە بـابەتە شـیکردنەوەییەکانی بیرکـاری، کە تێـدا وەسـفی دووری نێـوان دوو شـتمان بـۆ دەکـات. واتە بـۆ ئەوەی باسـی دووری نێـوان دوو شـت بکەیـن، ئەوە دەبێـت پێوەرێـک هەبێـت بـۆ ئەوەی ئەو دووریەی پـی وەسـف بکەیـن یـان بـدۆزینەوە. ئـاهووتە مەترییەکـان چەنـد جۆرێکیـان هەیە، هەر یەکەو بەجۆرێـک پێناسـە کـراوە، بـاوترین ئـاهووتەی مەتـری، کە ناسـراوترینە پێـی دەڵـێن: ئـاهووتەی ئیقلیـدی دوو ڕەهەنـدی (Usual metric space)، کە لەم ئـاهووتەیە دووری نێـوان دوو خـاڵ x و y بـریتییە لە درێـژی ئەو ڕاسـتەهێڵەی کە ئەو دوو خـاڵە بەیەکەوە دەبەسـتێتەوە. شـتێکی تـر کە لێـرە گـرنگە، ئەویـش ئەو کـۆمەڵەیەی کە ئەو ئـاهووتەیەی لەسـەر پێنـاس دەکەیـن چییـە، وە چـۆن پێناسـەی دەکەیـن. ئـاهووتەی ئیقلیـدی ئەو ئـاهووتەیە کە لەگەڵ ژیـانی ڕۆژانەی ئـێمە تەواو یەکـدەگرێتەوە، چـونکە وەک نمـونە لە هەنـدێک ئـاهووتەی مەتـری (Descrete) بە پێـی پێناسـەکەی دەڵێـت: دووری نێـوان مـن و خـاڵم لە شـارۆچکەی کـۆیە؛ کە لە دوو شـاری جیـاوازین، ئەوە دووری نێوانمـان بـریتییە لە 1! ئەوەش لە ڕاسـتی ئەگەر سـەیر بکەیـن مەحـاڵە، بـۆیە ئـاهووتەی ئیقلیـدی ئەو ئـاهووتەیە کە لەگەڵ ژیـانی ئـێمە، چـوون و هاتنمـان یەک دەگرێتەوە. بە شـێوەیەکی گشـتی، مەتـرییەک d و کـۆمەڵەیەک X پێـان دەوتـرێن ئـاهووتەی مەتـری، ئەگەر بێـت و d

نەخشــەیەکی راســتی بێــت لە جــووتە رێکخــراوی (x,y) و ئەو ســێ مەرجەی خوارەوە جێ بەجێبکات:

1- پێویســتە دووری نێــوان هەر دوو خاڵێــک، گەورەتــر بێــت لە ســفر، وە ئەگەر دووری نێــوان دوو خــاڵ کــردیيە ســفر، ئەوە ئەگەر و تەنیــا ئەگەر دەبێــت ئەو دووخــاڵە یەکســان بــن. (واتە ناکرێــت بڵــێن: مــن 2- مەتــر لە تــۆ دوورم!)

2- دووری نێــوان x و y جیــاوازی نەبێــت لەگەڵ دووری نێــوان y و x . (ئەگەر دووری تــۆ لە مــن دوو مەتــر بێــت، حەتــمەن دووری مــن لەتــۆش هەر دوو مەترە)

3- بــۆ هەرخاڵێــک z دووری لە نێــوان x بــۆ y بچــوکترە یــان یەکســانە بە "دووری نێــوان x و z" + "دووری نێــوان z و y". (بــۆ نمــونە ئەگەر تــۆ لە مــاڵی خۆتــان بچیــتە بــازاڕ، ئەوە ئەو دووریــیە لە نێــوان مــاڵی ئێــوە و بــازاڕ هەیە، بچــوکتر یــان یەکســان دەبێــت ئەگەر بێــت و تــۆ لە مــاڵی خۆتان بچیتە پارکێک z ، پاشان لە پارکەکەوە بچیتە بازاڕ)

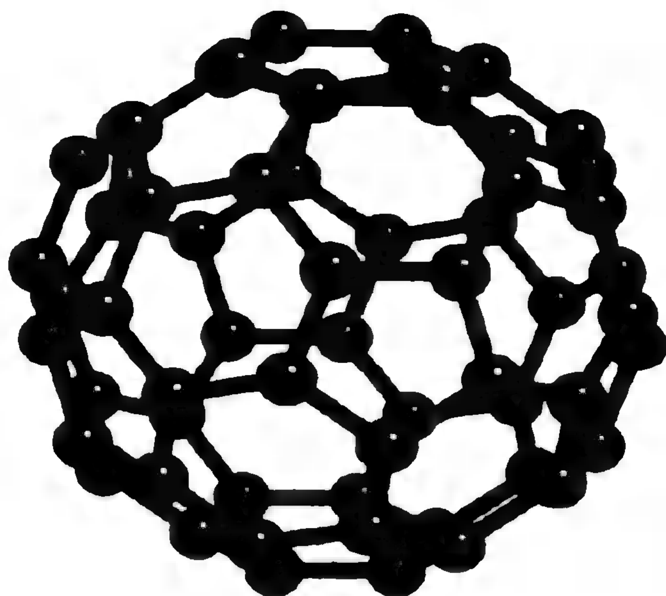


ڕاگیرکەرەکان

Geodesics

ڕاگیـرکەر، بـریتییە لە کـورترین ڕێچـکە لە نێـوان دوو خـاڵ لە ڕووەکـی چامـاوەیی. وەک چـۆن دەزانـین لە ڕووەکـی تەخـت کـورترین ڕێچـکەی نێـوان دوو خـاڵە بە ڕاسـتەهێڵ بەیەک دەگەیەنـین، بە واتـایەکی تـر، لە ڕووەکـی تەخـت، کـورترین ڕێچـکە بـریتییە لە ڕاسـتەهێڵ. بەڵام کاتێـک ڕووەکـی چامـاوەمـان هەبێـت، ئەوە کـورترین ڕێچـکە لە نێـوان دوو خـاڵی ئەو ڕووە چەمـاوەییە، بـریتییە لە هێڵێکـی چەمـاوەیی، دۆزیـنەوەی ئەو هـێڵە چەمـاوەیە بەهـۆی ئـاهووتەیەکی مەتـرییەوە دەبێـت. بـاوترین ڕاگیـرەکەری نـا-ئیقلیـدی بـریتییە لە بـازنە! وەک هێڵەکـانی یەکسـانی گـۆی زەوی و ڕێچـکەی فڕینـی فـڕۆکە. لە زۆر بـاردا، ڕاگیرکەرەکـان دەتوانـدرێت دیاربکرێـت و دوورییەکەیـان بـدۆزرێتەوە بەهـۆی تەواوکـارییەوە، وەک چـۆن ئەو هاوکێشـانەی نەخشـە و داتاشـراوی نەخشـەکانی تێـدایە وەسـفی ئەو ڕێگـایە (ڕێچـکەیە) دەکەن کە لە نێـوان دوو شـتدا هەیە، هەر ئەمەش بـوو کە ڕاگیرکەرەکـان وەسـفی تیـۆرییەکەی ئەنشـتاینیان کـرد، واتە ئەنشـتاین لە مەڕ تیـۆری کێشـکردنی گشـتی، ڕاگیرکەرەکـانی بەکارهێنـاوە، کاتێـک ڕاگیرکەرەکـان ئەو ڕێچکـانە پیشـان دەدات کە تەنێـک لە بۆشـایی-کـات چـونە، وە چـۆن ئەو تەنە بۆشـایی-کـات دەچەمێنێـتەوە. بـۆیە لە ڕاسـتیدا کـورترین ڕێچکەکـان لە نـاو بۆشـایدا، بـریتین لە ڕاگیـرکەرە چەماوەییەکـان، کە دەتـوانن ئەو خـولانەوەی هەسـارەکان ڕوونـبکەنەوە کە بە دەوری خـۆر

دەســـورپێنەوە و، هەر بەهـــۆی ئەو ڕاگیـــرکەرە چەماوەییـــانە تـــوانرا وەســـفی شـــکانەوەی ڕووونـــاکی بکرێـــت کـــاتێ ڕووونـــاکی بە نزیـــک تەنێکـــی بارســـتە زۆر گەورەی وەک کونە ڕەشەکان تێپەر دەبێت.

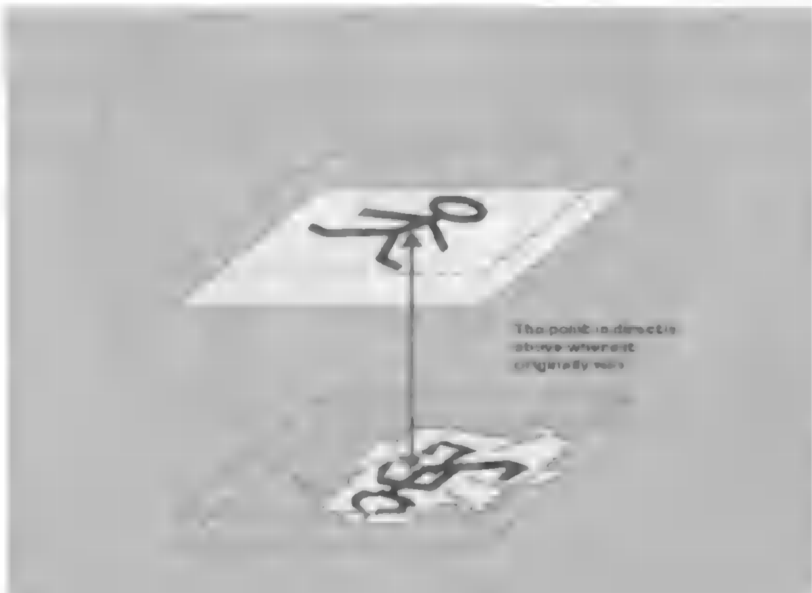


بیردۆزی خاڵی نەگۆڕ-جێگیر

Fixed point theorems

بیردۆزی خاڵی نەگۆڕ-جێگیر، یەکێکە لە بیردۆزە جوانەکانی بیرکاری. ئەو بیردۆزە لەهەمبەر نەخشەیەک، کە چەند مەرجێکی هەیە، ئەگەر لەو نەخشەیە هەبێت، ئەوە ئەو بیردۆزە بەسەر ئەو نەخشەیە جێبەجێ دەبێت. ئەویش ئەوەیە: نەخشەیەک لە ژێر ئەو چەند مەرجە ئەگەر لێی بێتە دی، ئەوە بەلایەنی کەم خاڵێک هەیە کە هەمیشە بە جێگیری دەمێنێتەوە لە شێوەگۆڕکێی و جێگۆڕکێیەکان، واتە خاڵێک هەیە کە $f(x) = x$. یانی کاتێک ئێمە دێن شێوەی تەنێکی ئەندازەیی دەگۆڕین، ئەوە خاڵێک هەیە لەو تەنە کە پێش گۆڕان و دوای گۆڕانی شێوەکە هەر وەک خۆی دەمێنێتەوە! بۆ تێگەیشتنی باشتر لەمە، وادانێ کاغەزێکت هەیە و وێنەیەکی لەسەرە (وەک ئەو وێنەی دراوە) ئەگەر بێت ئەو کاغەزە لەبەرگیراوە (کۆپی) لێ هەڵگرین، پاشان یەکێکیان دەق ونوشت بکەینەوە لە ناو دەستمان، پاشان هەر هەمان ئەو کاغەزە بکەینەوە، ئێستا دەبینین کە ئەو کاغەزە چرچ و لۆچی تێکەوتەوە وەک سەرەتا نییە، ئێستا ئەو پەڕەی چرچ و لۆچمان کرد لەگەڵ لەبەرگیراوەکەی هەر هەمان کاغەزە بەراورد بکەین، دەبینین شێوەکەی گۆڕاوە، بەڵام ئەم بیردۆزە دەڵێت، بەلایەنی کەم خاڵێک هەیە لەو کاغەزە هیچ گۆڕانی بەسەر دانەهاتووە! مەرجەکانیش کە لە نەخشەکە پێوستە هەبێت، ئەمانەن: ناکرێت پەڕەکە ببڕین و دواتر سەیری ئەو کردارە

بکەین، بۆیە مەرجە نەخشەکە بەردەوام بێت و پچڕانی تێدا نەبێت، پێوستە شێوەگۆڕاوەکە لە سنووری قەبارە و پێوانی شێوە ڕەسەنەکەی خۆی لانەدات، واتە پێوستە نەخشەکە نەخشەیەکی داخراو-شیشدراو[91] بێت. ئەم بابەتە لە زۆر بوار بەکاردێت و سوودی لێ وەردەگیرێت، بە تایبەتی لە مایکرۆئیکۆنۆمیک، وە هەروەها لە سەلماندنی هەبوون و تاقانەیی (Existence And Uniqueness) لە شیکارەکانی بابەتی هاوکێشە جیاکارییەکان (Differential equations)، هەروەها لە وانەی ، شیکردنەوەی ژمارەییانە (Numerical analysis).



[91] خەلکی هەولێر زۆر جار لە بری وشەی 'داخراو'، وشەی 'شیشدراو' بەکاردینن.

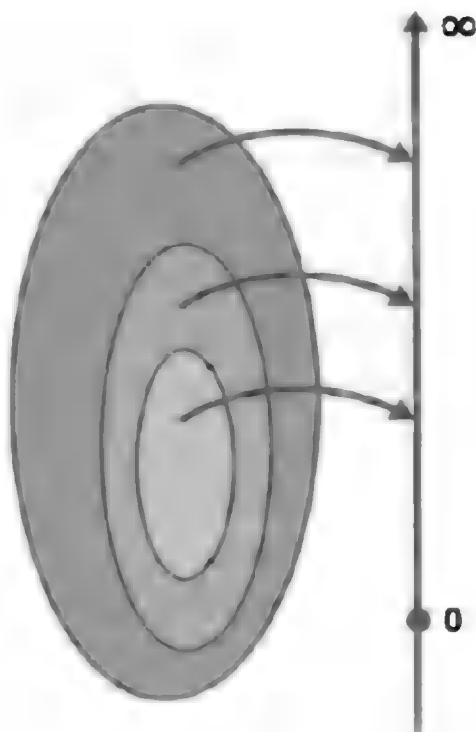
تیۆری پێوان

Measure theory

تیـۆری پێـوان، یەکـێکە لە تیـۆرە گرنگەکـانی بیرکـاری، کە تێـدا وەسـفی قەبـارەی (size) کۆمەڵەکانمـان بـۆ دەکـات و دەیانپێوێـت، هەروەهـا بیرۆکەکـانی وەک: درێـژی، ڕووبەر یـان قەبـارە (volume) دەگشـتێنێت. کاتێـک کـۆمەڵەیەک دەپیورێـت، ئەوە ژمـارەیەک دیـاری دەکەیـن، جـا ئەو ژمـارەیە بـۆ کێشـەکەیەتی، یـان بـۆ بەرزییەکەتـی یـان هەرشـتێکی تـر. تیـۆری پێـوان لە بـابەتی تەواوکـاری لیبیـگ گـرنگە، چـونکە تەواوکـاری لیبیـگ پشـت ئەسـتوورە بە تیـۆری پێـوان، وە پێـوان لە تەواوکـاری لیبیـک مەبەسـت لە پێوانی کـۆمەڵەیەکە لە ژمـارە. بـۆ نمـونە پێـوانی بەشـە کـۆمەڵەیەک، بچـوکتر یـان یەکسـان، دەبێـت بە پێـوانی کـۆمەڵە ڕەسـەنەکە خـۆی. بـۆ نمـونە: کـۆمەڵە هەیە پێـوانەکەی دەکـاتە سـفر تەنـانەت ئەگەر چـش ئەو کـۆمەڵەیە کۆمەڵێـک خاڵیشـی تێـدابێت! بـۆ نمـونە: ئەگەر شـتێک یـان ڕیسـایەک لەسـەر کـۆمەڵەیەک ڕاسـت بێـت کاتێـک ئەو کـۆمەڵەیە پێـوانەکەی سـفر نەبێـت، ئەوە ئەو ڕیسـایە یان ئەو شتە نزیکەی بۆ هەموو دانەکانی ناو کۆمەڵەکە ڕاستە!

تیـۆری پێـوان لە هەژمـارکردنی ڕووبەر بە ڕێگـای لیبیـگ ڕۆڵـی هەیە، ڕۆڵەکەشـی چارەسـەری ئەو کێشـانە دەکـات کە تەواوکـاری ڕیمـان لە توانـای دا نەبـووە چارەسـەری بکـات، بـۆیە بەهـۆی تیـۆری پێـوانەوە، هەژمـارکردنی ڕووبەر پێشـکەوتنی بەخـۆیەوە بینـی. لە کۆمەڵەکـان وەک:

کــۆمەڵەی ژمـــارە ڕێژەییەکـــان، پێـــوانی ئەو کــۆمەڵەیە دەکـــاتە ســـفر! (Measure of zero).



کۆمەڵە ئازادەکان و ئاهووتە تۆپۆلۆجییەکان

Open sets and topological spaces

کــۆمەڵە واڵاکــان-ئازادەکــان، ئەو کــۆمەڵانەن کە هەر دانەیەکــی نــاو کــۆمەڵەکە بەجۆرێــک نــزیکە لە هەر دانەیەکــی تــری نــاو کــۆمەڵەکە. لە ئــاهووتەی مەتــری، کــۆمەڵەی ئەو خــاڵانەی کە دووریــیــان لە خــاڵێکی وەکX بە تەواوی بچــوکترە لە ژمــارەیەکی بچــوکی وەک r، ئەوە ئەو کــۆمەڵەیە کــۆمەڵەیەکی ئــازادە، کە پێــی دەوترێــت تــۆپی ئــازاد (Open ball) لە نیــوەتیرەی r. بــۆ نمــونە: ئەگەر لە قوتابخــانەیەک لە پــۆلی یەکــی بنەڕەتــی هەمــوو قوتابییەکــان تەمەنیــان بە بەراورد بە قوتــابییەک تەنیــا چەنــد ڕۆژێکــی کەمــی بەیــن بێــت، ئەوە بەو پــۆلە دەوترێــت پــۆلێکی ئــازاد یــان واڵا. چەمــک و بــابەتی کــۆمەڵەی ئــازاد، کەرەســتەیەکە بــۆ ئەوەی بــابەتی تــری پــێ پێناســە بکەیــن، وە یــان بیــرۆکەی تــری لێــوە ســەرئاوبخەین. یەکێــک لە لقەکــانی بیرکــاری کە بــریتییە لە تۆپۆلــۆجی کە لەســەر بنچیــنەی کــۆمەڵەی ئــازاد خەت و خــاڵی داڕێــژراوە. ئــاهوتەی تۆپۆلۆجیــانە، بــریتین لە کــۆمەڵەیەکی بیرکارییــانە کە لەســەر بــنە کۆمەڵەکــانی کــۆمەڵەیەک پێنــاس دەکرێــت T، کە پێــان دەوتــرێن کــۆمەڵە ئازادەکــانی ئــاهووتەکە، لەکاتێــک کە ئەو کــۆمەڵانە لە پێشــتر پێناســە کــراوە نەک بەهــۆی بیــرۆکەی دووریــیەوە، چــونکە لە ئــاهووتەی تۆپۆلــۆجی شــتەکان تۆزێــک جیــاوازە، چــونکە بەهــۆی کــۆمەڵەی ئــازاد؛ ئــێمە وەســفی دەوروپشــتی دانەکــانی نــاو کــۆمەڵەکە دەکەیــن، بەڵام لە

ئـاهووتەی مەتـری بەهـۆی دەوروپشـتی (Neighborhood) دانەکـانی نـاو کۆمەڵەکەوە بڕیاری ئەوە دەدەین کە کۆمەڵەیەک ئازادە یان نا.

لە بیرکاریـدا، ئەگەر کۆمەڵەیەکمـان هەبێـت X کە $X \neq \phi$ وە τ خێزانێـک بێـت لە بنەکـانی X ئەوە τ پێـی دەوترێـت " تۆپۆلـۆجی لەسـەر کۆمەڵەی X"، ئەگەر هاتوو ئەو چەند مەرجەی خوارەوەی جێ بەجێکرد:

1- کـۆمەڵەی T، دەبێـت ئـاهووتە ڕەسـەنەکە و کـۆمەڵەی بەتـاڵی (ϕ) تێدا بێت. (ϕ،$X \in \tau$)

2- بـۆ هەر دوو بـنە کـۆمەڵەیەکی نـاو τ ، دەبێـت یەکتـر بڕینـی ئەو دوو بنە کۆمەڵەیەش لە ناو τ بوونیان هەبێت.

3- یەککگرتنـی هەر چەنـد بـنە کـۆمەڵە لە نـاو τ ، دەبێـت لە نـاو τ بوونی هەبێت.

هەر لەم ڕێـگەیەوە بەردەوامـی دەردەکەوێـت، کە پێشـتر لە ڕێـگەی ئامـانجەوە باسـی بەردەوامیمـان کردبـوو، بـۆیە هەر لە ڕێـگەی کـۆمەڵەی ئـازاد، دەکرێـت لێکـۆڵینەوە لەسـەر بەردەوامـی نەخشـە بکەیـن، ئەویـش بەو شـێوەیە: نەخشـەیەک بەردەوامە ئەگەر بێـت و نەخشـەی هەڵـگەڕاوەی هەمـوو کـۆمەڵەیەکی ئـازاد لە مەودای نەخشـەکە، بە هەمـان شـێوە کۆمەڵەیەکی ئازاد بێت لە بواری نەخشەکە.

یەکێکی تر لە بابەتە گرنگەکانی ئاهووتەی مەتری، بەرتییە لە بیرۆکەی پتەوی (compactness) کە بەهۆی بیرۆکەی کۆمەڵەی شیشدراو (داخراو) سەرچاوەی گرتووە. شتێکی تر لە تۆپۆلۆجی هەیە پێی دەوترێت: داپۆشەر (cover)، داپۆشەر بریتییە لە دەستەیەک لە کۆمەڵەی ئازاد کە پێکەوە یەکیان گرتووە، ئەگەر بێت و ئاهووتەیەکمان (space) هەبێت، وە بتوانین ژمارەیەکی دیاریکراو لەو دەستە ئازادە وەرگرین و گشت ئاهووتەکەمان داپۆشیت، ئەوە بەو ئاهووتەیە دەوترێت: ئاهووتەیەکی پتەو یان پەستێنراو (compactness). بە واتایەکی تر، چەند کۆمەڵەیەکی ئازاد هەبن بەو مەرجەی ژمارەیان زانراو بێت (ناکۆتا نەبێت)، وە بتوانن ئاهووتەکە داپۆشن، ئەوە بەو ئاهووتەیە دەوترێت ئاهووتەیەکی پەستێنراو. بە نموونەیەکی کۆنکریتی ئەمە زیاتر رووندەکەینەوە: وا دانێ ناکۆتا لیتر بۆیاغمان-سبوغ هەیە! وە رێگایەکمان هەیە کە دەمانەوێت ئەو رێگایە بۆیاغ بکەین، بۆیە ئەگەر توانیمان رێگاکە بە چەند لیترێک (واتە بۆ نموونە n لیتر) بۆیاغ بکەین، ئەوە بەو رێگایە دەوترێت: Compact.

فراكتاڵەكان

Fractals

فراكتەڵەكـــان، پێكهـــاتەیەكی ئەنـــدازەییە، كە لە گەورەكـــردنەوە و دووبـــارەكردنەوەی شـــێوە ئەنـــدازەییە لێكچـــووە شـــێوە بنەڕەتیـــیەكە پەیـــدا دەبێـــت. بە دەســـتەواژەیەكی تـــر؛ فراكتـــاڵ بە پێكهـــاتەیەك دەوترێـــت كە هەر بەشێكی، هاوشێوەی شێوە گشتییەكەیە.

فراكتـــــاڵ لە دوور و لە نـــــــزیكەوە وەك یەك دەبینرێـــــــت، بەم تایبەتمەنـــدییەی فراكتـــاڵ دەڵـــێن: لەخۆچـــوویی (self-similar). فراكتاڵەكـــان یەكێـــك لە ئـــامرازە گرینگەكـــانی گرافیكـــی كۆمپیـــوتەرە. وشـــەی فراكتـــاڵ لە ســـاڵی 1976 لەلایەن ماتمـــاتیكزان بێنۆیـــت مانـــدێلبۆرت هـــاتە نـــاو دونیـــای بیركارییەوە.

بە زمـــــانی بیركارییـــــانە فراكتاڵەكـــــان بـــــریتییە لەو كـــــۆمەڵانەی كە پێكهـــاتەیەكی دووبـــارەكی هەیە لەســـەر پێوەرێـــك. نمـــونە وەك: ســـێیەكی ناوەنـــدی كـــۆمەڵەی كـــانتۆر، یـــان ســـنورەكانی كـــۆمەڵەی مانـــدێلبۆرت، كە ســـنورەكانی ئەمـــانە هەرچەنـــد ســـەیری بكەیـــن و گەورەی بكەیـــن، دووبـــارە بـــــوونەوەكی تێـــــدا دەبینـــــین. شـــــێوە ئـــــالۆز و ڕووە تەلســـــماوەییەكەی فراكتەڵەكـان، مەرج نیـیە بەهـۆی ئەنـدازەی ئیقلیـدەوە بژێـر درابێـت. سـێیەكی ناوەڕاسـتی كـۆمەڵەی كـانتۆر، كـۆمەڵەیەكە كە هـیچ ڕەهەنـدێكی تەواوی نیـیە

وەک دەستـــتە (collection) خالێـــک ، بەلام لەگەڵ ئەمەش، کـــۆمەڵەیەکی نەژمێردراوە (uncountable).

فراکتاڵەکـــان شـــتانێکی سروشـــتین بـــۆ لێکـــۆڵینەوە لە خاڵێـــک؛ لە دیـــدی تیـــۆری پێـــوانەوە (measure theory). بە شـــێوەیەکی تایبەتیـــانە، تیـــۆری پێـوانە دەکرێـت بەکاربهێنـدرێت بـۆ پێناسـەکردنی جێگـرەوەیەک بـۆ چەمـک و دەســتەواژەی (ڕەهەنــد)، لەو ڕووەوە؛ ســێیەکی ناوەڕاســتی کــۆمەڵەیی کــانتۆر ڕەهەندێکی هەیە لە نێوان 0 و 1 .

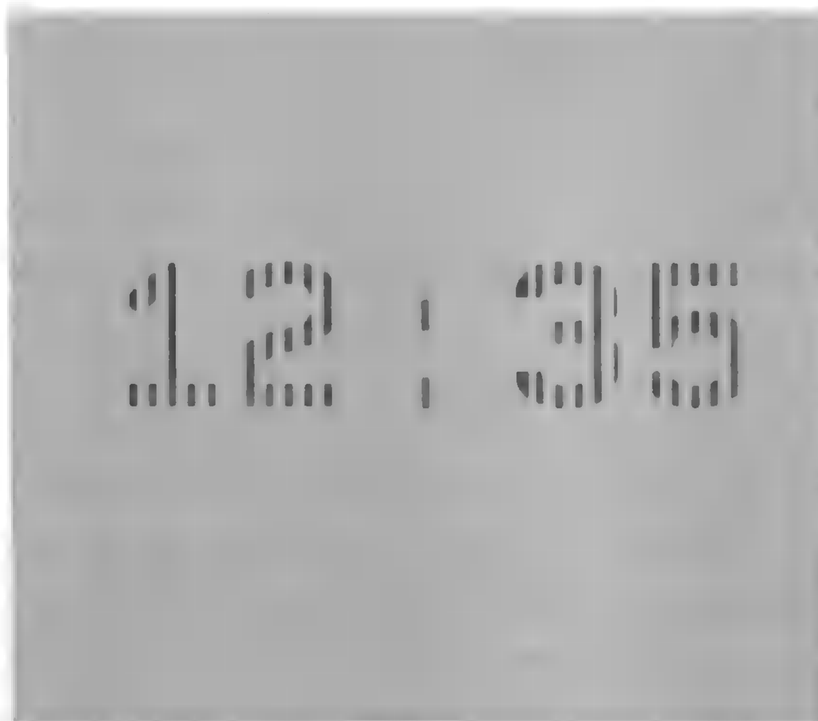


کاتژمێری فراکتاڵی هەتاوی

Fractal sundials

کاتژمێری فراکتاڵی هەتاوی، یەکێک لە بیرۆکە هەرە سەرنجڕاکێشەکان کە لە لایەن بیرکاریزان (Kenneth Falconer) لە ساڵی 1900 پێشنیازکرا. فالکونەر توانی بە بیردۆزیانە ئەوە بیسەلمێنێت، کە ئەم کاتژمێرە هەتاوییە، دەکرێت دروستبکرێت، کە فراکتاڵێکی سێ ڕەهەندییە، کە لە ڕێگەی ئەم فراکتاڵە سێ ڕەهەندیە دەتوانین کات بزانین، ئەویش بەهۆی ئەوەی کاتێک تیشکی ڕۆژ بە ناو ئەم فراکتەڵە تێپەڕ دەبێت و سێبەرێک دروست دەکات، ئەوە سێبەرەکە بە ژمارەی دیجتاڵی عربی دەردەکەوێت، ئەو ژمارانەش کاتمان پێ دەڵێت. خاڵی دەستپێکی فالکۆنەر، بریتییە لە هەبوونی یەکبەدوای یەکێک لە ئەستوبوونی ژمارەکان یان پیتەکان کە کێشراون لە ڕووتەختدا. فالکۆنەر پیشانی دا کە بۆ هەر یەکبەدوای یەکێکی لەم جۆرە، کۆمەڵەیەکی فراکتال هەیە بەو مەرجەی کاتێک گۆشەکە بۆ خۆر کاردانەوەی هەیە بۆ گۆشەکانی یەکبەدوای یەکەکە. ئەو ئاسۆکەی (سێبەر) کە فراکتاڵەکە دروستی دەکات لەسەر ڕووتەخت، نزیکە لە نووسینێک یان ژمارەیەکی مەزندەکراو، کە ئەمەش بەهۆی گۆشەی ئەو تیشکانەی دەکەوێتە سەرفراکتاڵەکە. سەلماندنەکەی فالکۆنەر دروستکەر نەبوو، بەڵکو تەنیا مۆدێلێک بوو: ئەو تەنیا سەلماندوویەتی کە کاتژمێرێکی لەو شێوە مومکینە، بەلام ئەو

ڕێگـــایەکەی نەخســـتوتە ڕوو بـــۆ دیـــارکردنی شـــێوەی ئەو فراکتـــاڵە ، بەڵام ئێستا ئەو کاتژمێرە هەیە و بەردەستە.



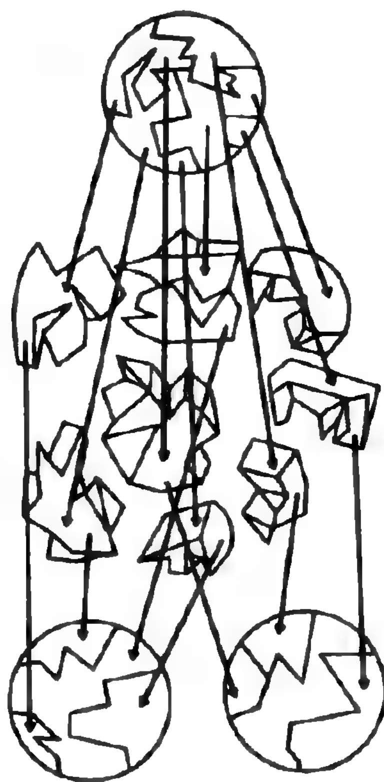
ئەم شێوەی سەرەوە کاتمان پێ دەڵێت بەهۆی فراکتاڵێکی فیزیکی.

پارادۆکسی بەناچ- تارسکی

The Banach-Tarski paradox

پارادۆکسـی بەنـاچ- تارسـکی، یەکـێکە لە پارادۆکسـە هەرە سـەیرەکان، کە دەڵێـت: گـۆیەکی سـێ ڕەهەنـدی دەکرێـت بکـرێتە چەنـد پـارچەیەک و بشـکێندرێت، پاشـان هەر بەو چەنـد پـارچەیە دوو گـۆی تـر دروسـت بکەیـن عەینـەن وەک گـۆیە ڕەسـەنەکەی سـەرەتا! وادانـێ شـوتییەکی خڕمـان هەیە، ئەو شـوتییە دەکەیـتە چەنـد پـارچەیە، پاشـان ئەو پارچـانە بە جۆرێـک پـێکەوە دەلکێنیـت، واتە بە شـێوەیەکی زیرەکـانە، ئەوە لە ئەنجـام دەتـوانی دوو شـووتی لە پارچەکـانی ئەو شـوتییە دروسـت بـکەی! بەشـێوەیەک ئەو پارچـانە نە دەپەسـتێندرێت وە نەدرێـژ و گەورەیـان دەکرێـت، واتە بەبـێ دەسـتکاری، سروشـتی پارچەکـان چـۆن هەیە هەر بەو شـێوە بەکـاری بێـنەوە، بەڵام چـۆن چـۆنی پـارچەی دەکەی ئەمە شـتێکی ڕێـگە پێـدراوە، واتە مەبەسـت ئەوە نییە تـۆپەکە دەکەیـنە چەنـد پـارچەیەک بە هەرەمەکـی. ڕاسـتی ئەمەش لە قسـەی حەلەق و پەلەق دەچێـت، چـونکە قەبـارەی گـۆیەکە پـێش پارچەکـانی دەبێـت بکـاتەوە هەر هەمـان قەبـارە دوای ئەم پرۆسـەیەش! واتە چـۆن دەبێـت شـوتییەکی 5 کیلـۆیی بە گـوێرەی ئەم قسـەیە تـێکە و لـێکەی لەگەڵ بکەیـت بیکەیـنە 10 کیلـۆ! واو دوو شـووتی؟! لە لایەکـی تـر، ئەمە دیـارە کە نابێـت ئەگەر بیـرۆکەی قەبـارە- بـۆ تـۆپێکی فیزیکـی بێت، بەڵام بـۆ تـۆپێکی بیرکارییـانە (Abstarct) دەکرێـت هەڵبـژاردەی تـر هەبێـت. ئەو

ئەنجــامە لەســـەر کــۆمەڵەیەکی نەژمێــردراو پشــتی پــێ بەســتراوە، کە دەســتە خاڵێک کە قەبارەیەکی نا ئاساییان هەیە.



تۆپۆلۆجی

Topology

تۆپۆلـــۆجی-شوێنناســـی یەکـــێکە لە لقەکـــانی بیرکـــاری. تۆپۆلـــۆجی وەســـــفی شـــــێوەکان (shapes) دەکـــــات و گرنگـــــی بە مـــــانەوەی ئەو تایبەتمەنـدییانە دەدات کاتێـک شـتێک لە شـێوەیەک دەگۆڕێـت بـۆ شـێوەیەکی تـر. بەلای تۆپۆلـۆجی، گـۆڕانی شـێوە گرنـگ نیـیە، ئەوەی گـرنگە سـیفەت و تایبەتمەنـدییەکان وەک خـۆی بمێنێـتەوە. واتە وەک چـۆن زێـر هەر بە نـرخە بە هەر شـێوەیەک بێـت، ڕێـک بێـت یـان نارێـک بێـت، ئەوە تۆپۆلـۆجیش بەو بیـرۆکەیە مـامەڵە لەگەڵ شـتەکان دەکـات. لە دیـدی تۆپۆلـۆجی کـوپێکی قـاوە خـواردنەوە و کێکێکـی دۆنـات وەک یەکـن، چـونکە ئەو دووانە هەر دووکیـان یەک ڕوویان هەیە و یەک کونی تێدایە.

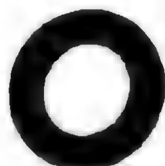
هەنـــدێ لە شــــێوەی تــــری تۆپۆلــــۆجی کە دەتوانـــدرێت بە ئاســـانی دروســـــتبکرێت بەهـــــۆی کـــــاغەز و ســـــمخەوە (Glue) کاتێـــــک هەردوو کۆتـــاییەکەی بە یەک ببەســـتینەوە. شـــێوەی تـــری تۆپۆلۆجیـــانە وەک: شـــریتی مۆبـیـۆس (Möbius strip)، بـوتڵەکەی کلایـن (Klein bottle) کە لە ڕووی تیـۆرییەوە دەکرێـت دروسـتبکرێت بەهـۆی خسـتە پـاڵ و زیـادکردن لە شـێوەیەکی گونجـاو، چونـک بەلای تۆپۆلـۆجی چـۆنییەتی دانـان و پـێکەوە لکـــانی شـــتەکان گـــرنگە. بیـــرۆکە تۆپۆلۆجییەکـــان بەکاردەهێنـــدرێت لە بەرنامەکـــانی کۆمپیـــوتەر و ناســـینەوی بەرنامەکـــان، هەروەهـــا لە گرافیکـــی

کۆمپیـــوتەر بەکاردەهێنـــدرێت. تەنـــانەت دەتوانـــدرێت بەکاربهێنـــدرێت بـــۆ چارەسەری چەند کێشەیەک، وەک دامەزراندنی بورجی تەلەفون... هتد.









ئەمانە لە دیدی تۆپۆلۆجی هیچ جیاوازییەکیان نییە.

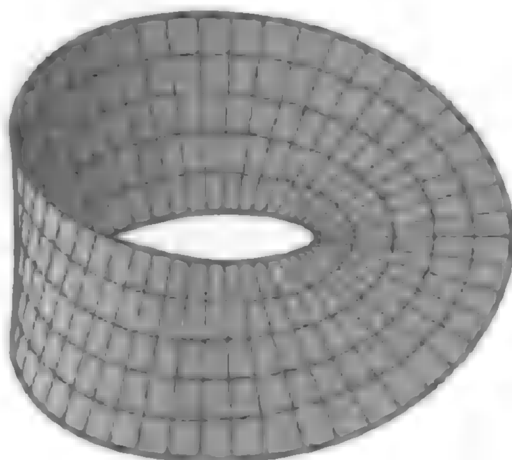
شریتەکەی مۆبیوس

The Möbius strip

شـــــریتەکەی مۆبیـــــوس، بـــــریتییە لە ڕووەک لەگەڵ یەک لا و یەک لێوار–قەراغ. ئەم شـریتە شـێوەکەمان دەسـت دەکەوێـت لە کـاقەزێکی شـریتی کاتێـک ئەو شـریتەی هەمـانە پێچێکـی پـێ دەکەیـن پاشـان هەردوو سـەرەکەی بەیەکەوە دەگەینـین و دەیبەسـتینەوە. یـانی ئەگەر پـارچە کـاغەزێکی بێنیـت 2 بسـت بێـت و دوو پەنـجە پـانییەکەی بیـت، ئەوە پـێش ئەوەی هەر دوو سـەری کـاغەزەکە بەیەک بگەیەنـی، پێچێـک بە کـاغەکە بـکە پاشـان هەردوو سـەرەکەی بەیەک بگەیـنە و بیبەسـتەوە بە سـمخ یـان تیـب یـان هەر شـتێکی تـر. شـــریتێکی لەو شـــێوەش نمـــونەیەکە لەو ڕووانەی کە ڕێچکەیەکـــی داخـــراوی هەیە، ئەو ڕێچـــکەیە کاتێـــک شـــتێک لێـــیەوە ڕێ دەکـــات، ئەوە ڕێچـــکەکە پـــێچەوانەی دەکـــاتەوە! وەک دەبینـــین کە شـــریتی مۆبیـــۆس ئەسـتەمە بڵـێن کـامە نـاوەوەی شـریتەکەیە و کـامە دەرەوە شـریتەکەیە! واتە شریتی مۆبیۆس لە تاک ڕووەکانە (non orientable).

ئەگەرکەسـێک لە خاڵێـک دەسـت بە ڕۆیشـتن بکـات لەسـەر شـریتی مۆبیـۆس، کـاتێ دەگـاتەوە شـوێنی دەسـتپێکەکە، دەبینـین هەڵـدەگەڕێتەوە-سـەرەوخوار! بـۆیە نـاوە و دەرەوەی شـریتی مۆبیـوس تووشـی سەرلێشـێوانمان دەکـات. پێکەوەنووسـاندنی هەردوو لێـوارەکەی (edge) شـریتی مۆبیـۆس پـێکەوە بە درێژایـی شـریتەکە، شـتێکی پەیوەندیـدارمان دەداتـێ ، ئەویـش بـوتڵی کلایـن (The Klein bottle). ئەم شـتەش لە

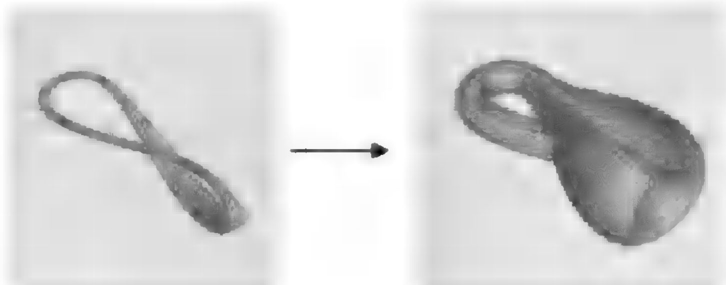
ئاموتەی ســێ ڕەهەنــدی ئیقلیــدی شــیاوی ئەنجامــدان نیــیە بەبــێ بڕینــی کــاغەزەکە. بە کــورتی و پــوختی، شــریتەکەی مۆبیــۆس کە وێنەکەشــی لە خوارەوە هاتووە، ڕووەکی تاک لایە و، واتە یەک لای هەیە!

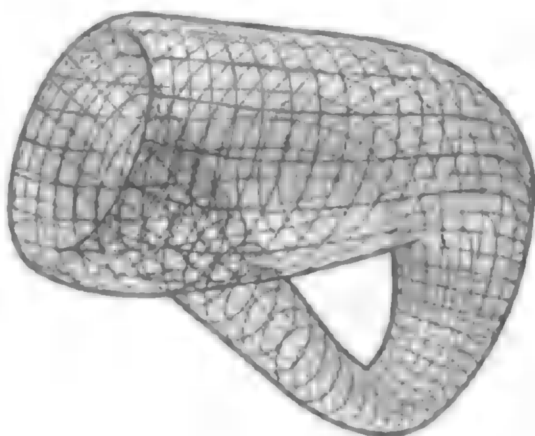


بوتڵەکەی کلاین

The Klein bottle

بـوتڵەکەی کلایـن، یەکـێکە لە ڕووە non-orientable، واتە نـاتوانین بڕیـاری ئەوە بـدەین کـامە دیـوی نـاوەوەی و کـامە دیـوی دەرەوەیە، بەجۆرێـک دەکرێـت بڵـێین بـوتڵێکە کە تەنیـا یەک دیـوی هەیە و هـیچ لێـوارێکی نیـیە. ئەم بـوتڵە هەر لە ڕێـگەی شـریتەکەی مۆبیۆسـەوە دروسـت دەکرێـت، کاتێـک هەردوو لێـوارەکەی شـیریتی مۆبیـۆس بـۆ یەک دێنیـنەوە، پاشـان پێکـی دەنووسـێنن، ئەو بوتڵەمـان بـۆ دروسـت دەبێـت. ئەم بـوتڵە لە شـوێنێک بە نـاو خۆیـدا تێـپەڕ دەبێـت، کە بـوتڵەکە سـێ ڕەهەنـدی هەیە، ئەوە یەکتـر بڕینێـک دروسـت دەبێـت، بەڵام لە چـوار ڕەهەندیدا ئەو یەکتـر بـڕینە نامێنێـت. بـوتڵەکەی کلایـن ڕووەکـی داخـراوە، واتە پـتەوە-داپۆشـراوە (compact) و هـیچ سـنور و لێـوارێکی نیـیە. بیرکاریزانەکـان ڕووە داخراوەکـان پـۆلێن دەکەن بە پێـی ژمـارەی کونەکـانی نـاو ڕووەکە، دیـارکردنی ئەوەی کە ئەمە دەکرێـت جیاکـاری لە نێـوان دیـوی دەرەوە و نـاوەوەی بکەیـن یـان نـا؟ واتە orientable.





یاسای ئۆیلەر لە هەمبەر چەند ڕووەکان

Euler characteristic

یاسای ئۆیلەر لە هەمبەر چەند ڕووەکان[92] (polyhedron) یەکێکە لە یاسا هەرە جوانەکانی نێو بیرکاری. ئۆیلەر جگە لەوەی هاوکێشەی تریشی بەناوە، وەک هاوکێشەی: $e^{i\pi} + 1 = 0$. ئەم یاسایە سەبارەت بە تەنێکی چەند ڕووە، یاساکە بریتییە لە:

$$V - E + F = 2$$

ئەم یاسایە یەکێکە لە یاسا بنچینەییەکانی ناو بابەتی تۆپۆلۆجی (Topology). چەندڕووەکان بریتین لە تەنێکی شێوە داخراو کە چەند ڕووەکی هەیە (Face)، وە چەند لێوارێکی (Edge) هەیە، لەگەڵ چەند سەرێک (Vertex) ، کە ڕووەکان بەهۆی لێوارەکانەوە دەور دراون و لێوارەکان بە هۆی سەرەکانەوە بەیەکەوە بەستراونەتەوە. ئەوەی گرنگە ئەم هاوکێشەیەی ئۆیلەر بۆ هەموو چەند ڕووەکان ڕاستە! تەفسیری یاساکە بەم شێوەیە: ئەگەر تەنێکی چەند ڕوومان هەبێت، کاتێک F ژمارەی ڕووەکانی بێت، E ژمارەی لێوارەکانی بێت، V ژمارەی سەرەکانی بێت، ئەوە هەمیشە ژمارەی ڕووەکان کەم ژمارەی لێوارەکان و کۆی ژمارەی سەرەکان، دەکاتە 2، واتە:

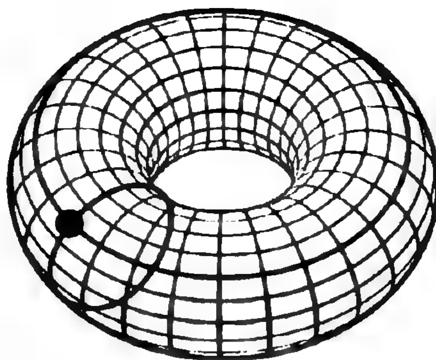
---

[92] لە بنەڕەتدا "دیکارت" دۆزەرەوەی ئەم یاسایە بوو، بەڵام لەبەر ئەوەی "ئۆیلەر" سەلمێنەی بۆ کرد، ئەوە بە ناوی ئۆیلەرەوە نرا.

$$V - E + F = 2$$

بۆ رووە داخروەکان (orientable) ژمارە کونەکان g پێی دەوترێت: توخمی (genus) رووەکە، کە ئەمەش پەیوەندییەکی بە یاساکەی ئۆیلەرەوە هەیە بە پێی هاوکێشەکە:

$$.V - E + \mathrm{F} = 2 - 2g$$



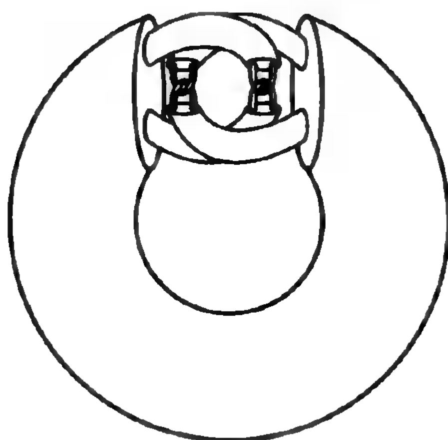
ئەم وێنەیە چووڕپێک نیشاندەدات، سەرێک ، دوو لێوار و یەک روو.

هۆمۆتۆپی

Homotopy

دوو ڕوو یـان دوو شـتی سـێ ڕەهەنـدی پێـان دەوترێـت هۆمۆتـۆپی ئەگەر بێـت و یەکێکیـان بتوانـدرێت بگۆڕدرێـت بـۆ ئەوەی تـر، واتە شـێوەگۆڕکێی پێبکرێـت بـۆ ئەوەی تـر، بەبـێ ئەوەی ببڕدرێـت یـان بەش بەش بکرێـت. بـۆ نمـونە: چـوپێکی تـایەی سـەیارە لەگەڵ کـوپێکی قـاوە خـواردنەوە ئەوە ئەو دوانە لێکچـوون، چـونکە هەر یەکەیـان تەنیـا یەک کـونی هەیە، وە یەک ڕوویـان هەیە، لەبەر ئەوەش بە شـێوەیەکی بەردەوام دەتوانـدرێت شـێوەگۆڕکیان پـێ بکرێـت بـۆ ئەوەی تریـان. مەبەسـت لە چەمکـی بەردەوام لێـرە واتە ناچـار نەبـین بڕینێـک یـان پارچەکردنێـک بکەیـن بۆ ئەوەی لەم شێوە بگەینە شێوەکەی تر.

بـابەتی هۆمۆتـۆپی هەر سـەر بە تۆپۆلـۆجییە کە پێشـتر بـاس کـراوە، بەڵام لێـرە ئەم بـابەتە سـوودی لـێ وەردەگیـرێ بـۆ لێکۆڵینەوەمـان لە نەخشـەکان، کە لێـرە تێگەیشـتن تۆزێـک لێـی قورسـە بـۆیە باسـی نـاکەین. لە هەنـدێ بـاردا، وەک گـۆی قۆچـدار (horned sphere) کە لە سـاڵی 1924 لە لایەن ئەلیکسـاندەر جـی (J. W. Alexander) داهێنـرا کە لە وێـنەکە نیشـاندراوە، ئەوە شـتێکی زۆر سـەمەرە بـوو، ئەم شـتە هاوشـێوەی گۆیەکی دوو ڕەهەندییە لە دیدی تۆپۆلۆجییەوە!



گرووپە سەرەکییەکە

The fundamental group

وەک لە نــــاوەکەییەوە دیــــارە، گرووپــــی ســــەرەکی ئــــاهووتەی تۆپۆلۆجییــانە، بــریتییە لە گرووپێــک لە بونیــادی شــتانێکی بیرکارییــانە لەگەڵ شــتانێکی تۆپۆلۆجییــانە کە تــایبەتە بە کونەکــان و ســنورەکانی ئەو شــتەی هەمــانە. ئەمەش نەگــۆڕە لە ژێــر ڕۆشــنایی هۆمۆتــۆپی[93] (homotopy) کە پشــت قــایمە بەو ڕێگــایەی کە ئەڵقەکــانی ســەر ڕووەک کە بتوانــدرێت شێوەکەی بگۆڕدرێت بۆ شێوەیەکی تر.

ئەڵقەکــان (loops) ڕێچکەیەکــن لە نــاو ئــاهووتەدا، کە خــاڵی کۆتــایی و دەســتپێکیان نیــیە، واتە خــاڵی دەســتپێک و خــاڵی کۆتاییــان وەک یەکە. دوو ئەڵقە هاوتــای یەکتــر دەبــن ئەگەر بێــت و بتوانــدرێت یەکێکیــان بگۆڕدرێــت بــۆ ئەوەی تریــــان. هەر بــــۆیە گرووپــــی ســــەرەکی، زانیارییەکــــان لە هەمــــبەر شــێوەکان لە ئــاهووتەدا بە کــۆد دەکــات، کە ئەمەش یەکەمــین و ئاســانترینی زنجیــــریەکە لە گــــرووپە هۆمۆتۆپییەکــــان کە لەســــەر ئــــاهووتە فــــرە ڕەهەندییەکان جێبەجێ دەکرێت.

ســــادەترین ڕێگــــا بــــۆ پێناســــەکردنی گرووپــــی ســــەرەکی، بــــرتییە لە جێگیرکردنــی چەنــد خاڵێــک x لە ئاهووتەیەکــدا X وە ســەرنج خســتە ســەر

---

[93] دوو نەخشــەی بەردەوام لە ئــاهووتەیەکی تۆپۆلۆجییــانە بــۆ ئــاهووتەیەکی تــر، پێــی دەوترێت هۆمۆتۆپی.

هەمــــوو ئەڵقەکـــان کە لەســـــەر خـــاڵە جێگیـــرەکەیە. ئەگەر دوو ئەڵقەمـــان هەبێت، هەر یەکەیـان پـۆلێکی-کـلاس فـراون لە ئەڵقەکـان پێناسـە بکەن لە نـاو ئـــاهووتەکەدا، ئەوە دەتـــوانین پـــۆلگەلێکی نـــوێ دابڕێـــژین بەهـــۆی شـــوێن کەوتنـی یەک ئەڵـقە، وە پاشـان ئەوانـی تـر. لەم ڕێگـایەدا کردارەکـان لەســەر ئەڵقەکـــانی پۆلەکـــان دروســـــت دەکەیـــن کە ئەمەش گرووپێـــک پێکـــدێنێت. گرووپـــی ســــــەرەکی هەر بە نەگـــۆڕی دەمێنێـــتەوە تەنـــانەت ئەگەر بێـــت و ئاهووتەکەش گۆڕانی بەسەر دابێت، واتە شێوەگۆڕکێ بەسەردا بێت.

ئەگەر ســـەرنجی چـــوپێکی ســـادە یـــان دۆنـــاتەکی ئەڵقەیـــی بـــدەین، وەک ئـــاهووتەیەک، ئـــێمە چـــوپێکی ســــەیارە هەڵـــدەبژێرین، ئێســـتا ئەگەر خاڵێـــک لەســــەر ئەو چـــووپە دەســـت نیشـــان بکەیـــن: بەهـــۆی ئەو خـــاڵەوە ئەتـــوانین ئەڵـــقەک بە دەوری چـــوپەکە-چێـــوە دروســـت بکەیـــن کە ئەو ئەڵـــقەیە دەوری کـــونەکەی ناوەڕاســـتی چـــووپەکە دەدات، پاشـــان دروســـتکردنی ئەڵـــقەیەک کە بەهـــۆی بـــوونی ئەو کـــونەی لە ناوەڕاســـتی چـــوپەکە هەیە؛ ئەڵـــقەکە دروســـت دەبێـــت: ئەو دوو جـــۆرە ئەڵـــقەیە هاوتـــا نیـــنە، وە نـــاتوانین یەکێکیـــان بۆگـــۆڕین بـــۆ ئەوەی تـــر بە هـــیچ شـــێوەیەک. پـــۆلی ســـێیەم لە پـــۆلی ئەڵقەکـــان، ئەو پـــۆلانەن کە دەتوانـــدرێت بگەڕێنـــدرێنەوە بـــۆ خـــاڵە ڕەســـەنەکە، کە ئەمـــانەش لە گرووپی سەرەکی ناژمێردرێن.

گرووپـــی ســـــەرەکی دەتوانـــدرێت بەکاربهێنـــدرێت بـــۆ ژمـــاردنی ئەڵـــقە یەک ڕەهەنـــدییەکان لە ئـــــاهووتەیەکی تۆپۆلۆجییـــــانە، لە لایەکـــــی تـــــر بـــــۆ ڕەهەنـــدی بەرزتـــر گـــرووپە هۆمۆتۆپییەکـــان دەتوانـــدرێت پێناســـبکرێن بە

بەکارهێنانی گۆیەکانەوە (spheres). لە بنەڕەتدا ئەمانە ئەو زانیارییانە دەستەبەر دەکەن لە هەمبەر پێکهاتەی ئاهوونەکە، بەڵام بەداخەوە کە زۆر سەخت و گرانە مەزەندەکردن و لێکۆڵینەوە لێیان. تایبەتمەندییە سادە نەگۆڕەکان کە زانیارییەکان بە کۆد دەکەن بە زۆر ڕێگای لێکجیاواز، کە ئەمانەش پێوستن لە هەمبەر لێکۆڵینەوە لە ڕەهەندی بەرزتر.

ژمارە بێتییەکان

Betti numbers

ژمارە بیتییەکان، کۆمەڵە ژمارەیەکن کە بە ناوی بیرکاریزانی ئیتاڵی "بێتیی" کراوە. ئەو ژمارانە تەفسیری سیمای شێوە یان ڕووە تۆپۆلۆجییەکان دەکەن، کە دەتواندرێت هەژماربکرێن بەهۆی بەکارهێنانی هۆمۆلۆجی. وەک یاسای ئۆیلەر لە مەڕ فرە ڕووەکان. ژمارە بیتییەکان یارمەتیمان دەدەن لە پۆلێنکردنی پێکهاتەکان بەهۆی چەند سیفەتێکی سادە و ساکارەوە.

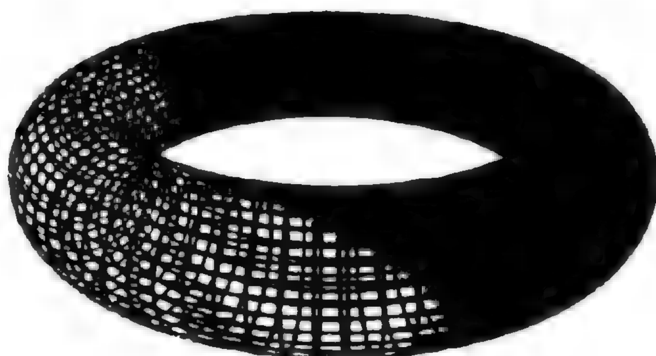
ئەگەر سەرنجی پارەچە پەنیرێکی سویسری بدەین، زانیاری گرنگی تۆپۆلۆجییانە هەیە، کە ئەمانەیە:

- تەنیا پارچەیەکە لە پارچە پەنیرێک، کە ئەو پارچەیە یەک بەشە و پێکەوە بەستراوەتەوە.

- ئەو پارچە پەنیرە n کونی هەیە، ئەو کونانە تۆپۆلۆجییانە جیاوازن و بەراورد نەکراون.

- لە ناو ئەو پارچە پەنیرە، m کونی شاراوە یان بڵقی شاراوە هەیە، ئەمەش ژمارە گۆیە سێ ڕەهەندە بەراورد نەکراوەکانن.

ئەم زانیارییانە، یان هاوتاکانیان بە ڕەهەندی بەرزتر، بریتین لە سێ یەکەمین ژمارەکانی بێتی لە هەمبەر شتەکە، ئەو شتەی هەمانە.



چـــوپێکی لەم شـــێوە کە یەک پـــارچەی پەیوەســـت بە یەکتـــرن، دوو کـــوونی بـــازنەیی، یەکێکـــان ئەوەی ناوەڕاســـت، وە ئەوەی تـــر کە دەکەوێـــتە نـــاوەوەی چـــووپەکە، وە یەک نـــارچەی بەتـــاڵی ســـێ ڕەهەنـــدی. ئەمـــانە ســـێ لە ژمارە سەرەتاییەکانی ژمارەی بیتیمان پێ دەدات، وەک 1،2،1 .

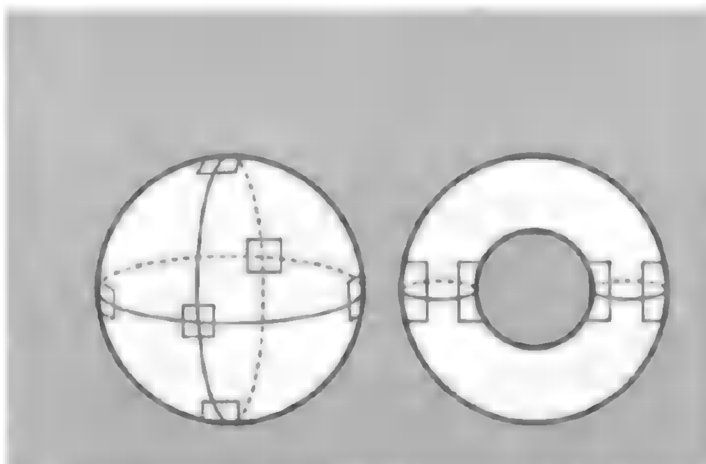
بیردۆزی تورستون

Thurston's geometrization theorem

بیـردۆزی تورسـتون، بیردۆزێکـی ڕێـگە خۆشـکەربوو بـۆ پـۆلێنکردنی ڕووە سـێ ڕەهەنـدییە داخراوەکـان. لە سـاڵی 1982، "بێـل تروسـتۆن" 8 پـۆلی دانـا کە ناسـراوە بە پـۆلی فـرە شـێوە سـێ ڕەهەنـدییەکان (3-manifolds)، کە هەر یەکەیـان دەتوانـدرێت ببەسـترێتەوە بە پێناسـە جیاوازەکـانی دووری لەسـەر ڕووێـک. تورسـتۆن گریمـانەی ئەوەی کـرد کە هەمـوو ڕووە سـێ ڕەهەنـدییەکانی تـر دەکرێـت پێـانبگەین لە ڕێـگەی بەیەکەوە گرێـدان (sewing together) ، نمـونەی ئەمـانەش 8 جـۆری بنەڕەتیە.

هەریەک لەو هەشـت پـۆلە، پەیوەسـتن بە گرووپـی لای. سـادەترینەکەی بەسـتراوەتەوە بە ئەنـدازەی ئیقلیـدی و لە 10 فـرە شـێوەی کۆتـادار پێکهـاتووە، ئەوانـی تـری لە ئەنـدازەی گـۆیی و ئەنـدازی بـرگەی زیـاد پێکهـاتووە، کە بە تەواوی پـۆلێن نەکـراون. ئەو ڕێگـایەی دەتـوانن لێـیەوە ڕێکبخـرێن بەیەکەوە، بـریتیە لە ڕەنگـدانەوەی لە پێکهـاتەی گرووپـی سەرەکی لە فرە شێوەی سێ ڕەهەندی.

لە سـاڵی 2003 گریگـۆری پەرلەمـان ئەو گریمـانەی سـەلماند بە بەکارهێنـای تەکنیکێکـی پێشـکەوتوو کە پێـی دەوترێـت: ricci flow بـۆ دیاریکردنی ئەوەی کەی ئەندازە جۆراوجۆرەکان هاوتای یەکتر دەبن.



ئەم بیردۆزەی سەرەوە لە سەرەتادا گریمانەیەکی یەکلانەکراوە بوو. گریمانەکەش ئەوە بوو کە ڕووە سێ ڕەهەندییەکانی وەک گۆیەکان و دۆناتەکان (وەک لە وێنەکە) پێکەوە دەدوورێنەوە لە فرە تەنیشتەکان.

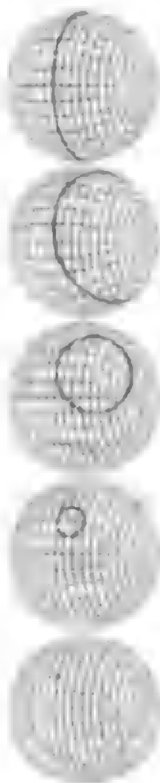
گریمانەی پوانکارییە

The Poincare Conjecture

گریمـــانەی پوانکـــارییە، یەکێـــک بـــوو لە پرســـە شـــیکارنەکراوەکان، هەروەهـــا ئەو پرســـیارە لە خشـــتەی ئەو پرســـیارانە بـــوو کە پەیمانگـــای کـــلای بیرکـــاری خەلاتـــی یەک میلـــۆن دۆلاری بـــۆ تەرخـــان کردبـــوو (ئێســـتاش). گریمـــانەی پۆانکـــارییە یەکەم پرسـیاری ئەو خشـــتەیە بـــوو کە شـــیکار کـــرا لە لایەن **گیریگـــۆری پەرلیمـــان** لە ســـالی 2003. پرســـەکە بە دەســـتەواژەی ئاســان دەڵێـت: **هەمـوو فـرە شـێوە سـێ ڕەهەنـدییە داخراوەکـان بـێ بـوونی هـیچ کونێـک لە نـاو شـێوەکە، ئەوە تۆپۆلۆجیـانە هاوتـای گـۆیەکی سـێ ڕەهەندی دەبن.**

ئـــاهووتەیەک هـــیچ کـــونێکی نیـــیە ئەگەر بێـــت و هەر ئەڵـــقەیەک لەگەڵ خاڵێـــک ببەســـــترێت، بـــۆیە گرووپـــی ســـــەرەکی لەم دۆخە شـــتێکی چـــــاوەڕوانکراوە. لە ئـــــاهووتەی دوو ڕەهەنـــــدی، تـــــاکە ڕوو لەگەڵ ئەو تایبەتمەنـــدییە بگونجێـــت، ڕووە گـــۆییە تۆپۆلۆجییەکـــانە. لە ســـالی 1904، **هێنـــری پوانکـــارییە** گریمـــانەی ئەوەی کـــرد، کە ئەمە لە ئـــاهووتەی ســـێ ڕەهەنـدیش ڕاسـتە. بـابەتە گـرینگەکە ئەوە بـوو: ئـاخۆ فـرە ڕووەکـی سـێ ڕەهەنـدی دەشـێت هەبێـت بەڵام گـۆ نەبێـت؟ پەرلیمـان سـەلماندی کە بیـردۆزی theorem geometrization thurston's لەدەرەوەی ئەم ئەگەرە بەکارەکە هەڵدەستێت.

هاوشـــێوەکانی گریمـــانەکەی پوارنکـــارییە بـــۆ ڕەهەنـــدی بەرزتـــر بە زوویـــی ئەوانـــیش پێـــداچوونەوەیان بەســـەردا کـــراو شـــیکارکرانەوە. کێشـــەی 5 ڕەهەنـــدەکە لە ســـاڵی 1960 ئەویـــش لە لایەن "ســـتیفن ســـماڵی"، دوایـــی مـــاوەیەک پێشـــکەوتنی بەخـــۆییەوە بینـــی لە لایەن مـــاکس نیومـــان. لە بـــارودۆخی 4 ڕەهەندیـــدا لە لایەن "وکایـــل فریـــدمان" ئاراســـتە کـــرا لە ســـاڵی 1982.



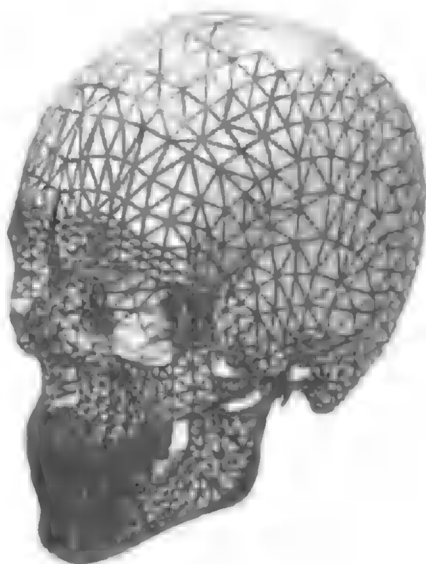
هۆمۆلۆجی

Homology

هۆمۆلـــۆجی، بـــریتییە لە ڕێگـــایەک بـــۆ پێـــوانی کونەکـــان لە نـــاو ئـاهووتەیەکی تۆپۆلۆجییـانە. هۆمۆلـۆجی بە دوای دەسـتە-پـۆل شـتێکە لە نـاو ئـاهووتەکە، کە ئەو دەسـتەیە سـنووریکیان نیـیە، سـنوری شـتانێک لە تـوخمی یەکتر، بەم جۆرە، دیارکردن و ناسینەوەی کونەکان.

گـــرووپە هۆمۆلۆجییەکـــانی ئـــاهووتەیەک، دەتوانـــدرێت هەژمارییـــان بکەیـــن بە هـــۆی بە سێگۆشـــەکردنی کۆمەڵەکـــان: واتە شـــێوەگۆڕییەک لە ڕووەکە بـــۆ سـەر، لێـوار، ڕوو ، قەبـارە چـوار ڕووەکـان... بەم شـێوە بـۆ ڕەهەنـــدی بەرزتـــر. وە مەبەســـت لێـــرە گـــۆڕینی ڕووەکە بـــۆ چەنـــدین سێگۆشـــەی بچـوک بچـوک، ئەمـانەش دەتوانـدرێت ڕێکبخـرێن بـۆ فـۆڕمی پێکهـــــاتەی گرووپێـــــک بە بەکارهێنـــــانی کـــــرداره ســــــنورییەکان (boundary operations)، کە ئەم گـــرووپەش تەفســـیری ڕووەکـــان دەکـــات بـــۆ لایەکـــانی. یەکێکـــی تـــر لە ڕێگاکـــان، پێـــی دەوترێـــت (cohomology) لە ڕەهەنـدە نزمەکـانەوە، کە بەشـە ڕەهەنـدە بەرزەکـان دروســـت دەکـــات. بە پشـــت بەســـتن بە کێشـــەکە، لەم ڕێـــگەیەوە کێشـــەکە مـــومکینە ئاســـنتر شـــیکار بکرێـــت وەیـــان ئەنجـــامێکی ڕوونتـــر دەســـتەربەر بکات.

گـــرووپە هۆمۆلۆجییەکـــان زۆر ئاســـانترن بـــۆ مـــامەڵەکردن لە تەک گـــرووپە هۆمۆتۆپییەکـــان-homotopy. لەگەڵ ئەوەش، چـــونکە هەنـــدێ کـونی ورد و بچـوک هەن کە هۆمۆلـۆجی بایەخیـان پێنـادات، لەبەر ئەمەش هۆمۆتۆپی مومکینە تا ئێستاش پێویست و گرنگتر بێت.

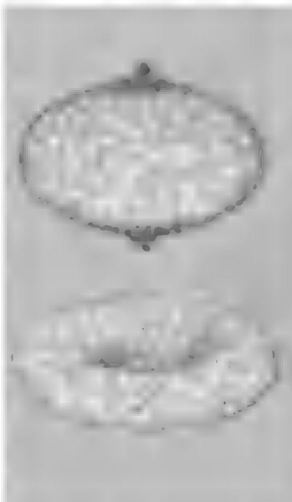


ڕووی کەلەســەرەکە شــێگۆرکێی پــێ کــراوە بــۆ سێگۆشــەی بچــوک بچوک.

چەپکە ئاراستەبڕەکان

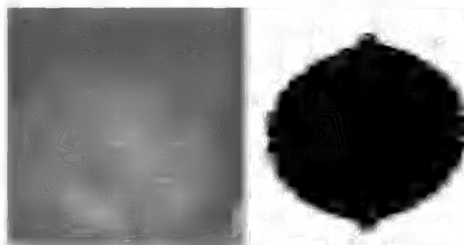
Vector bundles

چەپکە ئاراستەبڕەکان، ڕێگایەکە بۆ سەرنجدان لە پێکهاتە تۆپۆلۆجییەکان، کە لەسەر ڕووێک پێناس کراوە، تەنانەت بۆ دیوی ناوەوەشی. پێناسەکردنی چەپکە ئاراستەبڕ، لەسەر ڕووەک ئاهووتەی ئاراستەبڕەکان لەخۆی دەگرێت، واتە لە ڕێگەی ئاهووتەی ئاراستەبڕەکانەوە سەیری ڕووە تۆپۆلۆجییەکان دەکەین لە هەر خاڵێکی سەر ڕووەکە. ئەمەش بەهۆی هەڵبژاردنی دانەیەکی تایبەتی لە ئاهووتەی ئاراستەبڕەکان کە پێی دەوترێت ڕیشاڵ یان تاڵ (fiber) لە ڕێگەی ئەم ڕیشاڵانەوە لە هەر خاڵێکی سەر ڕووە تۆپۆلۆجییەکە دەڕوانین، دوای ئەمەش کە ئاراستەبڕی مەیدانی دروستکراوە، کە دەتواندرێت پیشانبدرێت به پێی ئاراسته برێکی ستوونی یان ئاسۆیی لە هەر خاڵێک. چەپکەکان کۆمەڵەیەکی بەترخمان پێ دەدات، لە ڕێگەی ئەم کۆمەڵەوە تەفسیری فرەڕووەکان دەکەین. یاسای ئۆیلەر و ژمارەی ئۆیلەر بۆ چەند ڕووەکان بە سروشتیانە لەم بابەتە سەرهەڵدەدات، وەک ژمارەی یەکتربڕینی خۆیی کە سەبارەت بە سفرەکانی ئاراستەبڕەکان زانیاریمان دەداتێ لە سەر ڕووەک. ئەگەر بێت و سفر نەبێت،



ئەوە هەر مەیدانێکی بەردەوامی ئاراستەبڕ لەسەر فرەڕووەک دەبێت سفرێکی هەبێت لە شوێنێکی سەر فرە ڕووەکە. ئەم بارەش زۆر جار پێی دەوترێت بیردۆزی تۆپی توکن (hairy ball theorem)، کە تاڵەکان ئاراستەبڕەکان دەنوێنن لەسەر فرە ڕووەک، وە بوونی سفریش، ئەو ڕاستییە دەنوێنێت کە هەر ڕێگایەک لە پێکەوەلکاندنی تاڵەکان بە بڕ لێکدانەکان، ئەوە بەلایەنی کەم تاجێک-crown (یان تاجە گوڵینەی پێ دەڵێن) بەرهەمدێنن.

وادانی کەلەسەری ئەو منداڵەی خوارەوە وەک فرە ڕووەک-(manifold) سەیر بکەین. هەر خاڵێکی-(point) سەری منداڵەکە؛ واتە هەر مووە خانەیەک بە خاڵێکی سەر فرە ڕووەکەی ببینین. ئەوا: هەر مووە خانەیەک ئاراستەبڕێکە-(vector)، وە کەلەسەری منداڵەکە بریتییە لە چەپکێک ئاراستەبڕەکان-(vector bundles) ئیتر لە ڕێگەی موەکانی سەری منداڵەکە لە پێکهاتە و شێوازی ئاراستەی مووە خانەکە دەگەین، لەکاتێک بەبێ بوونی موەکانی سەری بە ئاسانی ناتوانین. هەر لەم ڕووەوە یەکتر بڕینی ئاراستەبڕەکان تێبینی دەکەین [94].



[94] وەرگێڕ.

تیۆری k

K-theory

تیــۆری k لە دەوروبەری ســاڵی 1950 گەشــەی ســەند. ئەم تیــۆرییە ڕێگــایەکی دەســتەبەرکرد بــۆ جیــاکردنەوەی چەپــکە ئاراســتەبڕەکان لەســەر فــرە ڕووەک، بــۆ چەنــد پــۆلێکی جیــاواز، ئەوانــیش گــرووپ و تیــۆری ئەڵقە. ئەم پــۆلێنکردنە ڕێگــایەکی تــر بــۆ بــۆ زانینــی ژمــارەی کونەکــانی نــاو ڕووەکــی تۆپۆلۆجییانە.

ئەم تیــــــۆرییە هــــــاوتەرییە لەگەڵ چۆمۆلــــــۆجی (Chomology)، دەتــوانین بڵــێن وردتــر و ڕێکتــرە لە چۆمۆلــۆجی. کە ئەمەش ئــامرازێکی زۆر بەســــوودی ســــەلماندووە لەگەڵ بەکارهێنــــانی لە هاوکێشــــە جیاکارییەکــــان، هەروەهــا ئەمەش ڕێگــایەک بــووە بــۆ پێشــکەوتنی مەیــدانی ئەنــدازە نــا-ئالوگۆڕەکــان (Noncommutative geometry). ئەنــدازەی ئاموتەکــان کە وەســفە جەبرییەکانیــان ســیفەتی نــا-ئــالوگۆڕین، بە واتــایەکی تــر، کاتێــک xy ع پێوســت نیــیە بکــاتەوە yx. لە فیزیــای تیــۆری، تیــۆری k ڕۆڵێکــی زۆر گرنــگ دەگێرێــت لە هەنــدێ تیــۆر، وەک: تیــۆری ســترینگەکان (string theories) کە هەوڵــێکە بــۆ وەســــفکردنی تۆنــۆلکە ســــەرەکییەکانی گەردوون، وەک: سترینگە فرە ڕەهەندەکانی لەرینەوە:

(Vibrating multidimensional strings)



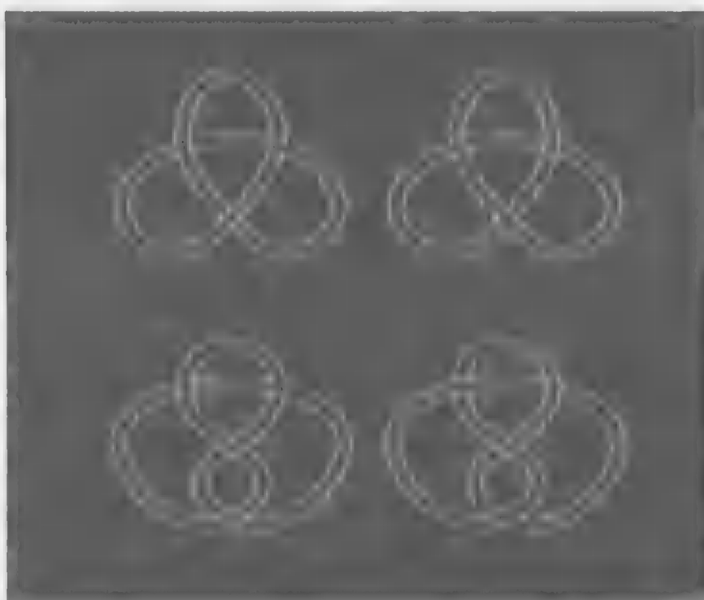
تیۆری گرێ

Knot theory

گـــرێ، لە بیرکاریـــدا بـــریتییە لە چەمـــاوەیەکی داخـــراوی تێکئـــاڵاو لە ئـــاهووتەی ســـێ ڕەهەنـــدی، دوو یـــان زیـــاتر چەمـــاوەی لەم شـــێوە ناســـراون وەک ئەڵـــقە یـــان زنجیـــرە ئەڵـــقەیەک. تیـــۆری گـــرێ، مەبەســـت لە تەفســـیرکردن و پـــۆلێنکردنی گرییەکـــانە، وە ســـەرنج خســـتنە ســـەر ئەوەی کە دەبێـت چـۆن بنوێنـدرێت، یـان ئەو یاسـایە چییە کە لێکیـان جیـا دەکـاتەوە. لەم بـابەتە گرییەکـان دەکرێـت هاوتـای یەکتـر بـن ئەگەر بێـت و چەماوەکانیـان بتوانـدرێت بە شـێوەیەکی بەردەوام شـێوەگۆرکێی پێبکرێـت بـۆ ئەوەی تریـان بـــێ ئەوەی بـــڕین و دڕیـــن تێـــدا بەکاربهێنـــدرێت. ســـــەرەڕای ئەوەش، بەراوردکردنـــی گرییەکـــان هێشـــتا کـــارێکی وەهـــا ئاســـان نیـــیە و وەڵامێکـــی وردی نیـــیە. لێـــرەش لە هەمـــبەر نەگـــۆڕاوە گرییەکـــان ژمـــارەک هەیە، تایبەتمەنـــدییەک، کە وەک یەکە بـــۆ هەمـــوو گرییەکـــان ، کە دەســـتکاری نەکـــراون بەهـــۆی شـــێوەگۆرکێوە. بەڵام بەهەمـــوو ئەو بـــارانەی کە زانـــراون، چەنـــدین جـــۆری جیـــاوازی لە گرییەکـــان هەن کە دەکرێـــت هەمـــان تایبەتمەنـدی گرییـان هەبێـت، بـۆیە ئەوانـیش دەستنیشـان نەکـراون. مەبەسـت لە نەگۆڕاوە گرێ، ئەو گرییانەن کە هاوتای یەکترن.

تیـۆری گـرێ گـرنگە لە زانسـتی زینـدەزانی بـۆ وەسـفکردنی پێچەکـان و شـــێوەی DNA کە پەیوەنـــدی بە پرۆتینەکـــانیش هەیە. هەروەهـــا ئەم تیـۆرییە لە ڕەهەنـدە نزمەکـانی سیسـتەمی داینەمـیکەڵ-جـووڵەیی بەکاردێـت

کە بۆ دیارکردنی ئەوەی کە چۆن دەتواندرێت خولگە دەورییەکانی هەندێ لە هاوکێشە جیاکارییەکان یەکتر ببڕن.



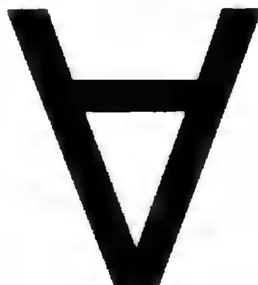
لەم وێنەی سەرەوە جیاوازی نێوان گرییەکان بە ڕوونی دیارە.

بەشی دوانزەهەم

ژیربێژی و سەلماندن

Logic and proof

∀♂ ∈🌎، ∃♀ ∈🌎 *s.t* ♂ + ♀ = ❤



لۆجیک-ژیربێژی و بیردۆز

Logic and theorem

"هەرکە مەحـــاڵ ڕیشـــەکێش دەکەی، هەر چیـــیەک کە دەمەێنێـــتەوە وەڵامەکەیە، شتێکی ڕێتێچوویە." (شیرلۆک هۆڵمس)

لە ســـەرەتادا دەبێـــت جیاکـــاری بکەیـــن لە نێـــوان لـــۆجیکی نـــوێ و لـــۆجیکی هـــاوچەرخ-بیرکـــاری، مەبەســـت لە لـــۆجیکی هـــاوچەرخیش لـــۆجیکی هێمـــاییە، وەک "بێرتراننـــد ڕاســـڵ" لە پەرتـــوکی "پرنســـیپیا ماتماتیکـــا" دەڵێـــت: "لـــــۆجیکی هێمـــــایی خوێنـــــدنەوەیەکی جیـــــاوازە جـــــۆرە گشـــــتییەکانی بەڵگەهێنـــانەوە". بەڵام "دەیڤیـد هیڵبێـرت" لە پێناســـەی بـۆ لـۆجیکی نـوێ دەڵێـت: "بـــــریتییە لە جێبەجێکردنـــــی میتـــــۆدی فۆرمـــــاڵی بیرکـــــاری لە بوارەکـــــانی لۆجیکـدا".[95] بەڵـگە بیرکارییەکـان، بـۆ ڕاسـتی دروسـتی دەقێکـی بیرکارییـانە، لە یاســـاکانی لـــۆجیکەوە ســـەرچاوە دەگـــرن. ئەوە دەردەخەن کە چـــۆن دەســـتەواژە بیرکارییەکـــان (statement) لە مەڕ تایبەتمەنـــدییەکانی شـــتێکی بیرکارییـــانە دەتوانـــدرێت بەکاربهێنـــدرێت، بـــۆیە ئەگەر دەســـتەواژەیەکی ســـەرەتایی ڕاســـت بێـت، ئەوە هەرچـی لەســـەر ئەو دەســـتەواژانەوە ســـەرئاو دەکەون، ئەوانـیش هەر ڕاســـتن. بەڵام ئەمە تەنیـا دەسـت تێـوەردانێکی وەهـا ســـادە و ســـاکار نیـــیە، تایبەتمەنـــدییەکان و شـــتەکان لە بیرکاریـــدا، لەگەڵ ئەوەی شـــتانێکی ڕووتـــن-پەتـــین، بەڵام پێوســـتیان بە پێناســـەکردن و

[95] لـۆجیکی کـۆن و هـاوچەرخ. د. حسـن حسـێن جەبـاری. 2015. دەزگـای چـاپ و پەخشـی نارین-هەولێر.

ناساندنێکی فەرمــی هەیە. بیرکــاری زانســتێکی ڕووخســارەکییە، بــۆیە پشــتی بە دیدەکشـــن بەســـتووە، واتە لە یاســـا گشـــتییەکانەوە، بـــاس لە شـــتە هەنــدەکییەکان دەکەیــن، بــۆیە تــا هەنــووکەش هەنــدێک دەقــی بیرکــاری هەن (وەک کۆنجێکتەرەکــان) بــۆ هەزاران و ملیۆنــان ژمــارە شــتەکە ڕاســتە، بەڵام لەبەر ئەوەی بە شـــێوەیەکی گشـــتی شـــتەکە یەکلانەکـــراوەتەوە ئەوە هەر گوومـــانی لەســـەرە. بە شـــێوەیەکی نمـــوونەیی، بیرکـــاری بە کۆمەڵێـــک شـــتی ســـەرەتایی دەســـت پێـــدەکات، وەک: بەڵـــگە نەویســـتەکان، کە تایبەتمەنـــدی ئەو شـــتە ســـەرەتاییانەن. دەســـتەواژەی ئـــاڵۆزتری بیرکاریـــانە لە بەکارهێنـــانی ئەو یاســـا ژێربێژییـــانە بینادەکرێـــت، وەک: سیســـتەمی بەڵگەنەویســـتی، سیســـتەمی ئەنـــدازەی ئیقلیـــدی و تیـــۆری کـــۆمەڵە. لە پێناســـەکان و چەمکەکـــانەوە زۆر جـــار شـــتانێک دروســـت دەکەیـــن ئەســـڵەن وەڵامەکەی بە وردی نـــازانین، وەک لەســـــــەرەوە ناومـــــــان هێنـــــــان (conjectors)، کـــــــۆنجێکتەر ئەو دەقە بیرکـــارییەوە پێـــدەچێت ڕاســـت بێـــت، بەڵام هـــیچ ســـەلماندنێک بـــوونی نیـــیە تـــا پشـــت ڕاســـتی بکـــاتەوە، واتە نەتوانـــدراوە بســـەلمێندرێت، یـــانیش ناتوانـــدرێن دژە نمـــوونەیەک بـــدۆزرێتەوە کە دەقەکە بە هەڵە بخـــاتەوە. کـــۆنجێکتەر ئەگەر تـــوانرا ســـەلمینەی بـــۆ بکرێـــت، ئەوە دەبێـــتە بیـــردۆز. بیرکـــاریزانی هەنگـــاری 'پـــۆل ئیـــدوارس'[96] لە وەســـفی بیرکاریزانەکـــات دەڵێـــت : **وەک ئـــامێرێکن بـــۆ گـــۆڕینی قـــاوە بـــۆ بیـــردۆز.** بە کـــورتی و پـــوختی: ژێربێـــژی-لۆجیـــک بـــریتییە

[96] 'پـــۆل ئیـــردۆس' بیرکـــاریزانی هەنگـــاری بـــوو، کە یەکێـــک بـــوو لە بیرکـــاریزانە هەرە چالاکەکـــان و بەتـــایبەت لە تیـــۆری ژمارەکـــان، کە بە هەمـــوو ژیـــانی خەریکـــی بیرکـــاری و پەزلـــی بیرکـــاری بـــووە و زۆرتـــرین ژمـــارەی تـــوێژینەوەی هەبـــووە. لە وتەیەکـــی دەڵێـــت: "هەمـــو شت کۆتایی دێت، تەنها ژمارە بە نەمری دەمێنێتەوە."

لە ڕێسا گشتییەکانی دروست بیرکردنەوە؛ کە بابەتەکەی بریتییە لە پێناسە و بەڵگەهێنانەوە. فێرمان دەکات چۆن پێناسەی شتەکان بکەین و بەڵگە بۆ دروستی شتکە بێنینەوە یان چۆن شتێک بە درۆ بخینەوە؛ کەواتە بیرکاری بناغەکەی بریتییە لە لۆجیک، وە بگرە لۆجیکێکی زۆر پێشکەوتووە. بیردۆزیش دەقێکی سەلمێندراوە، کە دەرگای گفت و گۆی لەسەر داخراوە، وە پاک کراوەتەوە لە تۆزی گومان. بیردۆز[97] بە گشتی باسی دیاردەیەک دەکات. بۆ نموونە: **کۆکردنەوەی دوو ژمارەی جووت، ئەنجامەکەی هەر دەکاتەوە ژمارەیەکی جووت.** واتە پێویست ناکات بێن دوو، دوو ژمارە بێنین تاقیبکەینەوە بۆ ئەوەی بزانین؛ ئەریێ دەکاتەوە ژمارەی جووت؟ ئەمە واتا چی؟ واتە بیرکاری پشت بە زانیارییە هەندەکییەکان-بەشی نابەستێت بۆ گەیشتن بە ئەنجامێکی هەمەکی-گشتی، کە ئەمەش پێچەوانەی زانستە سروشتییەکانە، وەک فیزیا، کە لە زانیارییە هەندەکییەکان بەرە و یاسا هەمەکییەکە دادەکشێت، واتا پشت بە (استقراء) دەبەستێت[98]. لەگەڵ هەموو ئەمانەش، ڕاستی بیرکاری، ڕاستییەکی جێگیرە و گۆڕانی بەسەردا نایەت، وەک چۆن تیۆری لە زانستە سروشتییەکان دەکرێت شۆڕشی بەسەردابکرێت و تیۆرییەکی باشتر بێت شوێنی تیۆرییەکەی پێش خۆی بگرێتەوە! ئەم شۆڕشە، لە زانستی

---

98 "جۆن. ب کۆنوای" لە شوێنێک دەڵێت: "بیرکاری، بۆ من بریتییە لە هۆبە-کۆمەڵە نموونەیەک؛ بیردۆزەکانیش دەربڕینێکن-دەستەواژە لە هەمبەر نموونەکان. مەرامیش لە سەلماندنی بیردۆزەکان؛ پۆلێنکردن و شاوەڵەکردنی نموونەکانە.

فۆرمالی بیرکاری بوونی نییە، واتە هیچ کاتێک شۆڕش بەسەر ڕاستییەکی بیرکاریدا ناکرێت. بەڵام یەکێک لە مەرجەکانی تیۆری لە زانستە سروشتییەکان، ئەوەیە کە دەبێت ئەو تیۆرییە ئەگەری هەڵە بوونی لە ناو هەناویدا هەڵگرتبێت.[99]

[99] محسین برهان- بۆدکاستی چارگ (تەقینەوە مەزنەکە).

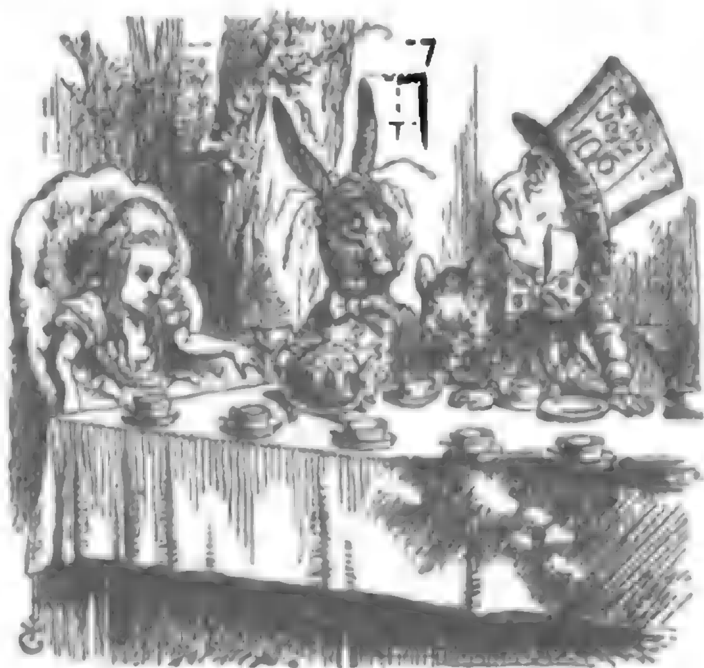
سەلماندن

Proof

سەلماندن، لە سادەترین پێناسە بریتییە لە بەڵگەیەک (argument) کە راستی و دروستی ئەنجامێک پشت راست دەکاتەوە، نەک تەنیا لە پشت گومانێک، بەڵکو لە پشت هەموو گومانەکان. یاخود پێوانەیەکە کە پێکهاتووە لە چەند پێکهاتەیەکی تێکهەڵکێشراوی یەقین بەخش، بۆ دەست خستنی دەرئەنجامێکی یەقین.[100] ئامانج و بنەماکەش هەر ئەمەیە. لەگەڵ ئەوەشدا، نە پەیوەستە بە شوێن، نە پەیوەستە بە کات! کات لە پشت سەلماندنە بیرکارییەکان هیچ گرنگییەکی نییە. ئیقلید بەر لە 300 پێش زاین، چەندین بیردۆزی سەلماند، زانیشی تا دونیا ماوە، ئەو بیردۆزانە هەر بە راست دەمێنەوە! لە راستیدا میتۆدی سەلماندن دەگەڕێتەوە بۆ گریک، ئەوان دەیانزانی شتێک راستە، بەڵام دەیانپرسی؛ بۆ چی راستە؟ بۆیە ئەمەش بە پێچەوانەی میسرییەکان و بابلییەکان بوو، ئەوان یاری سەلماندن نەبوون، واتە نەیاندەزانی بۆچی بیردۆزێکی وەکو بیردۆزی فیساگۆرس راستە؟ بۆیە گریکەکان بە دوای ئەو وەلامی 'بۆچی "یەوە بوون، کە وەڵامەکەشیان دەستکەوت لە ڕێگەی بەکارهێنانی ئەقڵ و لۆجیکەوە.

[100] زانستی لۆجیک. کەمال ئەمین گوڵپی. 2018. خانەی چاپ و پەخشی ڕێنما-سلێمانی.

بۆ سەلماندنی دەقێک یان یاسایەکی گشتی بیرکارییانە، چەندین ڕێگای جیاواز هەن، بە جۆرێک هەندێ لە ڕێگایانە بۆ سەلماندنی دەقێک کەم یان زۆر دەست نادەن. لەگەڵ ئەمەش، یەکێک لە جوانییەکانی بیرکاری بریتییە لە دۆزینەوەی ئاسانترین و جوانترین ڕێگا بۆ گەیشتن بە ئەنجام. سەرەڕای ئەمەش، چەندین کێشە هەن، کە بیرکارییەکان نازانن بە چ میتۆدێک بۆ گژ ئەو کێشانە دابچن؟!



سەلماندنی ڕاستەوخۆ

Direct proof

لە بابەتی پێشوو وتمان چەندین ڕێگا و شێوازی جیاواز هەیە بۆ سەلماندنی ڕاستییەک، یەکێک لەو ڕێگایانە بریتییە لە سەلماندن بە شێوەیەکی ڕاستەوخۆ. ئەم ڕێگایە سادەترین جۆری سەلماندنە، ئەمەش کاتێک بەکاردێت کە هیچ ڕێگرییەک لە هەنگاوەکانی سەلماندنەکە بەرۆکمان نەگرێت. هەڵبەتە ئەم ڕێگایە بۆ سەلماندنی هەموو ڕاستییەک دەست نادات، بۆیە، بۆ ئەوەی دەقێک بە سەلماندنی ڕاستەوخۆ ڕاستییەکەی دەربخەین، ئەوە پشت بەو دەقە دەبەستێت کە هەمانە، وەک: ناوبەند و یەکەکانی دەقەکە. سەلماندنی ڕاستەوخۆ زنجیرەیەک لە هەنگاوی لۆجیکییە لە دەستە گریمانەیەکەوە[101] بۆ دەرئەنجامێکی ویستراو. لەگەڵ ئەوەش، تا ڕادەیەک ناهەموار و بێزارکەرە نووسینی هەموو هەنگاوە سەرەتاییەکانی سەلماندنێک لە بەڵگەنەویستە سەرەتاییەکانی بابەتێک بە هەموو وردەکارییەکانەوە، بۆیە سەلماندنی ڕاستەو خۆ تاڕادەیەک ڕێگاکەی کورت-قەدبڕە. زۆر جار لە ڕێگای سەلماندنی ڕاستەوخۆ زۆر شتی ئامادەکراو هەیە بەکاری دەهێنین، وەک:

---

[101] ڕەنگە یەکێک بپرسێت، بۆچی لە گومانەوە دەست پێ دەکەین، گریمانەکە لەسەر چ بنچینەیەک دروست دەکەین؟ دروستکردنی گریمانە ئەویش هەر بەهۆی لۆجیکەوەیە، واتا ناکرێت بێن بە کەیفی خۆمان گریمانە دروست بکەین، بۆ نمونە گریمانەی لەم شێوە: ئەگەر $1=2$ ، ئەوە .... ئەسڵەن هەر ئەنجامێک لەمە بکەوێتەوە هەڵەیە، چونکە گریمانەکە خۆی هەڵەیە. چونکە یەکێک لە یاساکانی لۆجیک ئەوەیە لە گریمانەی هەڵە (پێشەکی هەڵە)، ئەنجامی ڕاستی لێ ناکەوێتەوە.

بیردۆزێکی پێش خۆی، یان لیمایەک[102] یان بەهۆی پێناسەکانەوە. بەڵگە ستانداردەکان-نمونەییەکان لە سەلماندنی راستەو خۆ بریتییە لە کۆمەڵێک رێسای سادەی هەڵنجهێنان، کە ئەو تەکنیکانە ناسراون بە بەندە لۆجیکییەکان. بۆ نمونە: دەمانەوێت دەستەواژەی Q بسەلمێنین. ئەگەر توانیمان بناغەیەک دانین کە ئەگەر P راست بێت، ئەوە Q یش راستە، واتە $P \rightarrow Q$ ، لێرە بۆ دەستەواژەی P ئەوە حەتمییەن شتێک هەیە راستە، کە ئەگەر بێت و لەو دەستەواژەیە راستی دەستەواژەی Q دەربخەین، ئەوە کەواتە Q راستە.

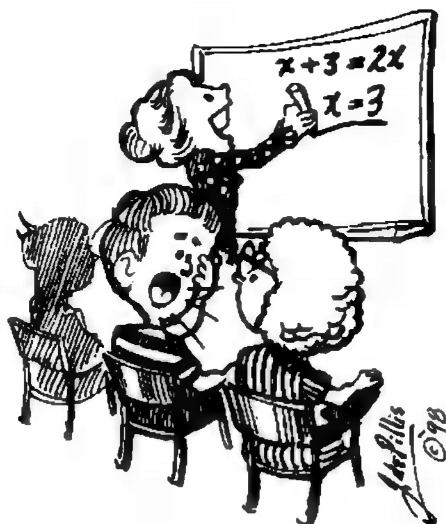
نمونە: دەمانەوێت بیسەلمێنین کە؛ دووجای هەر ژمارەیەکی جووتی ئەرێنی دابەشی 4 دەبێت.

ئێستا ئێمە شتێکمان هەیە بەکاری دێنین، ئەویش ژمارەیەکی جووتی ئەرێنی، لەبەر ئەوەی هەموو ژمارەیەکی جووتی ئەرێنی بە پێی پێناسەی ژماری جووت، لەسەر شێوەی 2n دەنووسرێت، کاتێک n ژمارەی ئەرێنی سروشتییە. ئێستا 2n ژمارەیەکی جووتە بە پێی پێناسەی ژمارەی جووت (بناغەیەکمان دروستکرد). ئێستا دێین دووجای دەکەین: $(2n)^2 = 4n^2$ دیارە دووجای لای چەپ دەکاتە ئەو برەی لای راست

102 لیما (Lemma) لە خزمەتی بیردۆز بەکاردێت. وەختێ لە سەلماندنی بیردۆزێک دەگەینە هەنگاوێکی قورس، ئەوە دەچین لە دەرەوەی بیردۆزەکە ئەو هەنگاوە قورسە بەجیا دەسەلمێنین، پاشان لە ناو بیردۆزەکە خۆمان لە هەنگاوە قورسەکە نەجات دەدەین بە ناو هێنانی لیماییەکە.

$4n^2$ کە دیـــارە ئەو ڕادەیەش هەمیشـــە دابەشـــی 4 دەبێـــت.[103] ■ بـــۆیە گەیشـــتینە ئەوەی هەمـــوو ژمـــارەیەکی جـــووتی ئەرینـــی دابەشـــی 4 دەبێـــت. ئەمە مـــومکینە ئاســـان و ســـادە بێـــت، بەڵام ســـەلماندنی ڕاســـتەوخۆ بنـــاغەی زۆرێـــک لە ســـەلماندنەکانی تـــرە لە بیرکاریـــدا. هەمـــوو میتۆدەکـــانی ســـەلماندن ئەوەنـــدە ئاســـان نـــین بەو شـــێوەی ســـەرەوە، بۆنمـــونە ســـەلماندن بەهـــۆی هێڵکارییەوە، سەلماندن بەهۆی ئیندەکشنەوە.

لێـــرە دەســـتەواژەی P بـــریتییە لە ژمـــارەیەکی جـــووتی ئەرێنـــی کە بە پێـــی پێناســـە دەتوانـــدرێت بە ئەنجـــامی لێکـــدانی 2 و ژمـــارەیەکی ئەرێنـــی سروشـــتی بنووســـرێت، وە دەســـتەواژەی Q بـــریتییە لە دووجـــای ژمـــارەیەکی جووتی ئەرێنی کە دابەشی 4 دەبێت.



103 ئەو هێمایە ■ واتە سەلماندنەکە بەکۆتا گەیشت.

سەلماندن بە هۆی لێکدژییەوە

Proof by contradiction

سەلماندن بەهۆی لێکدژییەوە، یەکێکە لە میتۆدە هەرە جوانەکانی سەلماندن لە نێو بیرکاریدا. لەم میتۆدەی سەلماندنەدا، مومکینە سەلماندنی راستەوخۆ بۆ دەقێک کارێکی وەها ئاسان نەبێت، وە لەبەر ئەوەی ئێمە بۆ هەر دەقێکی بیرکاری، واتە بۆ هەر دەستەواژەیەکی بیرکاری، دوو وەلام هەیە؛ یان راستە یان هەڵەیە. ئێمەش زۆر جار بۆ ئەوەی راستی دەستەواژەیەک دەرخەین، ئەوە پێچەوانەی دەستەواژەکە گریمان دەکەین، ئەگەر پێچەوانەی دەستەواژەکە راست دەرچوو، ئەوە دەستەواژە رەسەنەکە هەڵەیە، ئەگەر پێچەوانەی دەستەواژەکە رەسەنەکە هەڵە دەرچوو، ئەوە دەستەواژە رەسەنەکە راستە. نموونە: ئەگەر بمانەوێت بوونی دارەکەی پێشماڵمان بسەلمێنم، ئەوە دەڵێم ئەو دارە بوونی نییە. بەس دەبینم سێبەری هەیە و لە تیشکی رۆژ دەماپارێزێت، کەواتە ناکرێت بوونی نەبێت، ئەمەش واتە دارەکە بوونی هەیە کە لە سەرەتاوە وتمان ئەو دارە بوونی نییە، کە چی ئێستا دەڵێین سێبەری هەیە، کەواتە گەریمانەکەمان هەڵە بووە، بۆیە دارەکە بوونی هەیە.

لە بیرکاریدا دەستەواژەی نابەجێ (absurd)، بریتییە لە لێکدژی دەستەواژەکە. بۆ ئەم مەبەستەش بۆ سەلماندنی دەستەواژەیەک بەم میتۆدە، هێڵێکی سور هەیە، کە دەبێت پێوەی پابەند بین:

- بۆ پیشاندانی ئەوەی کە Q دەبێت ڕاست بێت، وا دادەنێین کە Q ڕاست نییە. واتە وادادەنێین پێچەوانەی Q ڕاستە.

- ئەو میتۆدانەی پێشتر هەمانە بەکاری دێنین بۆ دەرخستنی دەرئەنجامی ئەو گریمانە هەڵەیەی کردوومانە، لەو شوێنە دەوەستین کە لە یەکێک لە هەنگاوەکانی سەلماندنەکە لێکدژی لەگەڵ گریمانە دروست دەبێت.

- کاتی دروستبوونی لێکدژەییەک لەگەڵ هەر یەکێک لە هەنگاوەکانی سەلماندنەکە و گریمانەکە، ئەوە بۆمان دەردەکەوێت پێچەوانەی دەستەواژە ڕەسەنەکە ڕاست نییە، کەواتە دەستەواژە ڕەسەنەکە ڕاستە.

نموونە بۆ ئەمە: سەلماندنەکەی ئیقلد لە هەمبەر بوونی ناکۆتا ژمارەی خۆبەش، کە گریمانی کرد کە کۆتادار (Finite) ژمارەی خۆبەش هەیە بۆ ئەوەی بیسەلمێنێت ناکۆتا ژمارەی خۆبەش بوونی هەیە.



هەبوونی سەلماندن

Existence proofs

هەبــــوونی ســــەلماندن، پیشـــانی دەدات یـــاخود دەیســـەلمێنێت کە بەڕاســتی شــتێک هەیە لە هەمــبەر شــتێکی تــر یــان نــا. لەبەر ئەوەی چەمــکە بیرکارییەکـــــــــان زۆربەی هەرە زۆری پەتـــــــــین (Abstract)، ئەوە ســـەلماندنەکانی بـــوون و نەبـــوون دەتوەســـتێتن لە بەهەدەردانـــی کـــات و هەوڵەکانــت بــۆ دۆزیــنەوەی شــتێک یــان داتاشــینی شــتێک، کە ئەم شــتە لە ڕاستیدا بوونی نییە و ناشبێت! تەنانەت لە بارە پەتییەکانیش.

دوو جــۆر لە ســەلماندنی هەبــوون-بــوون هەنە، یەکەمیــان: ســەلماندن بەهــۆی بونیاتنـــان (proof by constriction): کە تێــدا نمـــونەی بەرجەســـتەیی بەرهەم دەهێنـــین لە شـــتەکان یـــان لە تایبەتمەنـــدییەکان. دووەمیــان: هەبــوونی ســەلماندن، کە پێــی دەوتــرێن ســەلماندن بەهــۆی نــا- بونیاتنــانەوە (nonconstractive proof): کە لۆجیکیــانە بە پێــی پێوســت بــۆ بــوونی شــتانێک هەنگــاو دەنێــت، بەبــێ پێدانی ئەتەرەیەک[104] یــان هێمــایەک دەربارەی نمونەیەک.

ســـەلماندنی بونیـــاتنەر زۆر ڕوونە. ئەگەر بێـــت و بپرســـین ژمـــارەی جـــووت هەیە کە دابەشـــی 16 بێـــت؟ وەڵامەکە بەڵـــێ هەیە، کە ســـەلماندنی کــورت و پوخــت بــریتییە لە 16 خــۆی. بە شــێوەی درێــژ بــریتییە لە ئەوەی

[104] ئەتەر: نیشانە و بەڵگە.

کە 16 دابەشی خۆی و دابەشی 2 دەبێت، وە 2 ئەو ژمارەیە کە 16 بەسەری دابەش دەبێت. بەدڵنیاییی چەندین ژمارەی تر دەکرێت لە سەلماندنەکە بەکاربهێندرێت، بۆنمونە هەموو بەشداربووەکانی 16 دەکرێت لە سەلماندنەکە بەکاربهێندرێت، بەڵام بۆ ئەوەی بیسەلمێنین شتێک بوونی هەیە، پێویستە تەنیا یەک نمونە دیار بخەینە ڕوو لە ناو سەلماندنەکە لەکاتێک چەندین نمونەی تر بوونی هەیە.

سەلماندنی نا-بونیاتنەر: دەکرێت زۆر ورد بێت، بۆنمونە: دەکرێت توانای ئەوەمان هەبێت کە پیشانی بدەین ئەو هاوکێشەیە $9x^5 + 28x^3 + 10x + 17 = 0$ شیکاری هەیە، بەبێ وتنی ئەوەی ئایا شیکارەکە چییە و چۆنە! ئەگەر لە هاوکێشەکە نرخی سفر بدەین بە ■ واتە $x = 0$ ئەوە لە لای چەپ 17 دەمێنێتەوە، بەڵام بۆ $x = -1$ ئەنجامەکە دەکاتە 30- . لەم ئەنجامانەش دەتوانین بیردۆزی بەهای ناوەندی بەکاربهێنین بۆ ئەوەی پیشانی بدەین کە بۆ هەر نرخێکی y لە نێوان 30- و17، ئەوە نرخێک هەیە بۆ ■ لە نێوان 1- و 0 کە 0 بەرهەم دێنێت لە هاوکێشەکە. لەبەر ئەوەی لای ڕاستی هاوکێشەکە سفرە، ئەوە شیکارێک بۆ هاوکێشەکە هەیە بە پێی ئەو سنورەی سەرەوە کە دیاریمان کردووە، بە کەمێک کارکردن لەسە هاوکێشەکە پیشانی دەدات کە شیکارەکە بێ هاوتایە- تاکە شیکاری شیاو لە بەکارهێنانی ژمارە ڕاستییەکانە. بە کورتی واتە: چونکە بە پێدانی دوو نرخ 1- & 0 دوو ژمارەمان بۆ دەرچوو 17 & 30-، دیاریشە سفر دەکەوێتە ئەو

نێـوانە، بـۆیە بە ئـاوەری[105] دەبێـت نرخێـک هەبێـت کە دەبێـتە ڕەگـی-شـیکاری هاوکێشەکە، چونکە 0 لەو نێوانە بوونی هەیە.

[105]ئاوەر: دڵنیایی.

پێچەوانە دژەکان و دژە نمونەکان

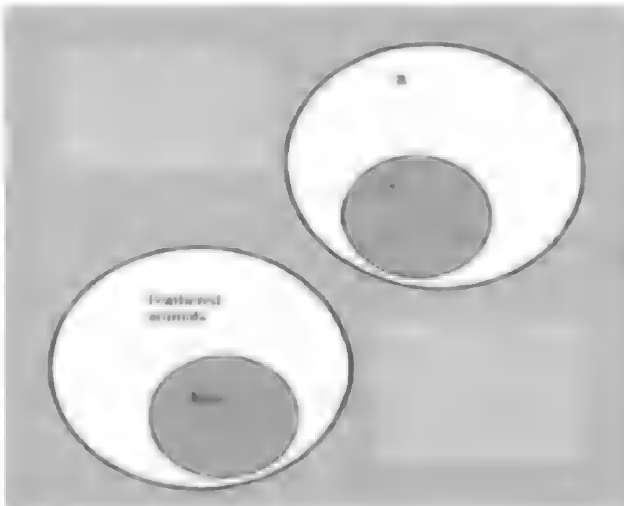
Contrapositives and counterexamples

پێچەوانەی دەستەواژەی p، دەکرێت پێی بڵێین ناp. پێچەوانەی ئەو دەستەواژەیە راستە ئەگەر p هەڵە بێت، وە هەڵەیە ئەگەر p راست بێت. وەک: هەموو مریشکێک سپییە، پێچەوانەکەی دەبێت: هەموو نامریشکێک نا سپییە. لێرە گرنگە چۆنییەتی و راستێتی وەک خۆی بمێنێتەوە. یەکێک لە یاسا زۆر گرنگەکانی لۆجیک بریتییە لەوەی ئەگەر $p \rightarrow q$ راست بێت، ئەوە هاوتای $\sim q \rightarrow \sim p$ راستە ، واتە ئەو دووانە جیاوازییەکیان نییە. هەندێ جار سەلماندنی دەستەواژەیەک بە هۆی پێچەوانەکەی ئاسانترە وەک لە دەستەواژە ڕەسەنەکە، ئەم جۆرە سەلماندنەش پێی دەوترێت سەلماندن بەهۆی پێچەوانە دژەکان. بەکارهێنانی ئەم میتۆدەی سەلماندنە تەنیا کاتێک سەرکەوتووە ئەگەر بێت و لێدوانەکە بسەلمێندرێت راستە، واتە تووشی دژەیەک نەبین لێی. بەڵام لە توێژینەوە بیرکارییەکان، کاتێک دەستەواژەیەکی ڕەسەن گریمانەیەکە ، ئەوە هەمیشە چانسی ئەوە هەیە کە دەستەواژەکە راست نەبێت، وە سەلماندنیش بوونی نەبێت! لەم بارەش دوو شت هەیە، ئەوەتە پێچەوانەی دەستەواژەکە بسەلمێنی لە بری دەستەواژە ڕەسەنەکە، ئەویتریش ئەوەیە نمونەیەک بدۆزیتەوە کە دەستەواژەکە بە درۆبخاتەوە واتە دژی دەستەواژەکە بێت. ئەگەر دەستەواژەکەمان Q بڵێت: هەموو ژمارە جووتە ئەرێنییەکان دابەشی 4 دەبەن، ئەوە دیارە 6 جووتە و ئەرێنییە، بەڵام 4 دابەش ناکات، بەو

ژمارە 4 دەوترێن دژە نمونە[106] (counterexample) کە دەستەواژەکەی بەهەڵە خستەوە، واتە disprove.

دەستەواژە: ئەگەر دانەیەک لە کۆمەڵەی A بێت، ئەوە دەبێت لە کۆمەڵەی B یش بێت. پێچەوانە دژەکەی دەبێتە: ئەگەر دانەیەک لە کۆمەڵەی B نەبێت، ئەوە ئەو دانەیە ناکرێت لە A بێت.

دەستەواژە: ئەگەر گیانلەبەرەکە باڵدار بێت، ئەوە دەبێت پەڕەمووچی هەبێت. پێچەوانە دژەکەی دەبێتە: ئەگەر گیانلەبەرەکە پەڕەموچی نەبێت، ئەوە ئەو گیانلەبەرە باڵدار نییە. (ئەو سەلماندنە کافی نییە کە هەموو ئەو گیانلەبەرانەی پەڕەموچیان هەیە، ئەوە باڵندەن).



[106] دۆزینەوەی ئەم نمونەیە لە هەندێ بانگێشەی بیرکارییانە بۆ راستێتی شتێک کارێکی وەها ئاسان نییە.

تێخوێندنی بیرکارییانە

Mathematical induction

یەکێکی تر لە میتۆدەکانی سەلماندن، بریتییە لە سەلماندن بەهۆی تێخوێندنەوە[107]. تێخوێندنەوە (Induction) بریتییە لەو شێوێنکەوتنی هەندەکییەکان بۆ بەدەستهێنانی بڕیارێکی هەمەکی (یاسای گشتی). لەم میتۆدە ئەنجامەکان ئەو دەستەواژانە دەگرێتە خۆی کە پشت بە ژمارە سروشتییەکان دەبەستن، بۆیە ئەو دەستەواژەی سەلمێنەی بۆ دەکرێت بۆ شتێکی لەو شێوەیە: بۆ هەر نرخێکی n ، ...،1،2،3 = n ، p(n) ڕاستە. بۆ سەلماندنی دەستەواژەیەکی لەم شێوە، چوار هەنگاو هەیە دەبێت جێ بەجێبکەین بۆ دەرخستنی ڕاستی و دروستی یاسایەک، ئەوانیش:

1- پیشانی بدە کە ئەوەی هەمانە ڕاستە ئەگەر بێت و $n = 1$، واتە $p(1)$ بسەلمێنە.

2- گریمان بکە کە ئەوەی هەمان ڕاستە ئەگەر بێت و $n = k$ کاتێک $k \geq 1$.

3-پیشان بدە ئەگەر $p(k)$ ڕاست بێت، ئەوە $p(k + 1)$ ڕاستە.

---

107 وەرگێر "مەریوان عبدول" لە پەرتوکی "پوختەی لۆژیک" وشەی "تێخوێندن"ی بەکارهێناوە لە بەرامبەر وشەی "Induction" پەرتوکەکە لە بلاوکراوەکانی ناوەندی "ڕەهەند"ە. سالی 2019 سلێمانی.

4- ئەمەش p(n) ڕاســـت دەردەخـــات بــۆ هەمــوو ژمارەیـــەکی n، کاتێک ... ,1,2,3 = n

هەنگــاوی چــوارەم لە ســێ هەنگــاوەکەی پــێش خــۆی ســەرچاوە دەگرێـــت یەک بەدوای یەک، واتە هەنگـــاوی یەکەم، هەوێنـــی هەنگـــاوی دووەمە، ئــی دووەم هەوێنــی هەنگــاوی ســێیەمە، بەو شــێوە، ئەمــانەش کە پێــی دەوترێــت: Bootstrap argument . کێشــە فەلســەفییەکان لەگەڵ چەمەکەکـــانی ناکۆتـــا دەبێـــنە هـــۆی ئەوەی کە زۆر لەگەڵ ئەو مێتـــۆدە یەکنەگرنەوە، تانانەت دەگاتە ڕادەی ڕەتکردنەوەشیان هەندێ جار.

INDUCTIVE METHOD TO PROVE

[illegible]

STEP 1 [illegible]

STEP 2 [illegible]

STEP 3 [illegible]

[illegible]

STEP 4 [illegible]

لابردن و هێزلێبڕین

Exhaustion and elimination

سەلماندن بەهۆی هێزلێبڕین، ئەو سەلماندنەیە کە کێشەکە دەکاتە چەند بەشێک، کە هەر بەشە و بەجیا مامەڵەی لەگەڵ دەکات. یەکێک لە کێشە مێژوویەکان کە بەو شێوە سەلمێندراوە، بیردۆزی چوار ڕەنگەکەیە (Four color theorem) ، کە ئەم بیردۆزە سەرەتا کرایە چەند بەشێک کە تەنیا کۆمپیوتەر دەیتوانی لێی تێبگات، لێرەش پرسیارەک دێتە ئاراوە: ئاخۆ بەڕاستی بەرنامەیەکی هێزلێبڕاوی کۆمپیوتەر دەبێتە سەرچاوەی لە دایکبوونی سەلماندنی کێشەیەک؟

لە یەکەمین سەرنج، پرۆسەی لابردنی "شێرۆک هۆلمس" دێتەوە یاد، کە دەشێت وەک پرۆسەیەکی هێزلێبڕین وابێت. بەڵام لە ڕاستیدا لابردن، سەرنج خستنەسەر لە گشت ئەگەرەکان دوور دەخاتەوە، ئەمەش لە ڕاستیدا ڕێگای پێچەوانەی دژە (contrapositive). بەکارهێنانی شیکردنەوەی هێزلێبڕین لە گومانەکانی تر، لە کێشەیەکی تاوانکاری، دەسەلمێنین کۆمەڵێک کەس هەموویان بێ تاوانن ، بۆیە دەتوانین بڵێین: ئەگەر پیاو کوژەکە بەڕێز (ڕاوسبۆتن) نییە، ئەوە هیچ یەک لە گومان لێکراوەکان پیاوکوژنینە. پێچەوانە دژەکەی بریتییە لە: ئەگەر یەکێک لە گومان لێکراوەکان تاوانبارەکە بێت، ئەوە پیاو کوژەکە بەڕێز (ڕاوسبۆتنە). وادانانە سەرەتاییەکە، ئەوەیە کە لەگەڵ ئەوەی ئێمە خشتەی تەواوی گومان لێکراوەکانمان هەیە، زۆر جار پەراوێز دەخرێن.



بەشی سێزدەهەم

تیۆری ژمارەکان

Number theory

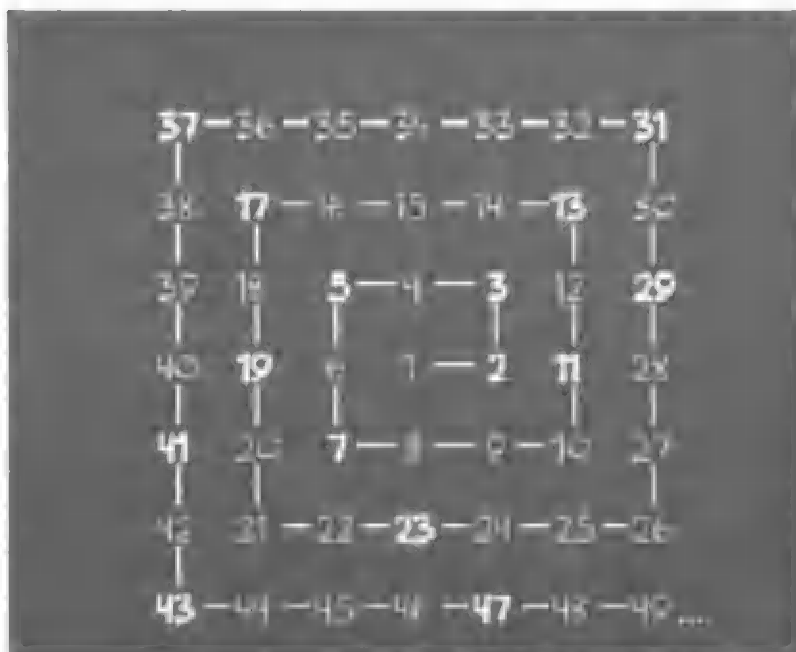


تیۆری ژمارەکان

Number theory

تیـۆری ژمارەکـان، یەکێکـی تـرە لە لقەکـانی بیرکـاری، دەتـوانین بڵـێین کـۆنترین لقـی بیرکـارییە لە دوای ئەنـدازە، کە جـومگەیەکی گـرنکە لە زانسـتی ژمـارە. پێشـکەوتن و دۆزیـنەوە لەم لـقەی بیرکـاری وەهـا ئاسـانییە و زۆر کەس بە لقێکـی وشـک و جاڕسـی دەبیـنن، کە لەو 20 سـاڵەی ڕابـردوو، پێشـکەوتنێکی وەهـا لەم لـقە ڕوویـنەداوە. تیـۆری ژمارەکـان بـریتییە لەو تیـۆرییەی کە لێکـۆڵینەوە لە هەمـبەر ژمارەکـان و تایبەتمنـدییەکانی دەرەوە و نـاوەوەی ژمارەکـان دەکـات، وە تەفسـیرییان دەکـات. تیـۆری ژمارەکـان لێکـۆلینەوە لە مەڕ گشـت جۆرەکـانی ژمـارە دەکـات، بەڵام لەگەڵ ئەمەش، کـۆمەڵەی ژمـارە خۆبەشـەکان سـەرەکیترین کـۆمەڵەن لە تیـۆری ژمارەکـان و بەشـێکی سـەرەکییە لە بیرکردنەوەمـان لەو جیهـانە. ئەگەر چـی کـارکردن لە گەڵ ژمارەکـان ڕەنـگە وشـک و بێـزارکەر بێـت، سـەرەڕای ئەوەش، هەرگیـز نابێـت ژمارەکـان و تیـۆری ژمارەکـان بەکەم بـزانین، چـونکە هەر لەسـۆنگەی ژمارەکـانەوە، ڕووبەڕووی کۆمەڵێـک پرسـیار زۆر قـوڵ و جـدی دەبیـنەوە و کێشـەکان چارەسـەر دەکەیـن. لەبەر ئەوەی ژمـارە خۆبەشـەکان بنـاغەی دروسـتبوونی ژمـارە سروشـتییەکانن، بـۆیە زۆرێـک لە کێشـەکان لە تیـۆری ژمارەکـان پەیوەنـدی بە ژمـارە خۆبەشـەکانەوە هەیە. لەگەڵ ئەمەش، ژمـارە خۆبەشـەکان، چەقـی تیـۆری ژمارەکـانە لە گرنگـی و بەکارهێنانیـان، کە لە کریپتـۆگرافی (cryptography) و ئاسایشـی و پاراسـتی ئیمێلەکـان،

یـان گواسـتنەوە بانکییەکـان، ئەمـانە گشـتیان بونیـاتێکی ژمارەییـان هەیە، کە لە نووسـینی ژمـارە دابەشـەکان (ژمـارەی دابەش) بەهـۆی لێکـدانی خۆبەشـەکان. دروسـتکردنی و کـۆد لە ژمـارە خۆبەشـەکان ڕەنـگە ئاسـان بێـت، بەڵام شـکاندنیان، ئێجگـار قـورس و گـرانە. ئەم لـقە، پەتـی تـرین لقـی بیرکارییە.



سەلماندنەکەی ئیقلید لە مەڕ ناکۆتایی ژمارە خۆبەشەکان

Euclid's proof of the infinite primes

ئیقلیـد 3000 سـاڵ بەر لە ئێسـتا، لە پەرتـوکەکەی بە نـاوی دانەکـان (elements)، دەیسـەلمێنێت کە ناکۆتـا لە ژمـارەی خۆبەشـمان هەیە، واتـا کـۆمەڵەی ژمـارە خۆبەشـەکان کـۆمەڵەیەکی ناکۆتـایە (Infinite). ئیقلیـد بـۆ سـەلماندنی ئەم ڕاسـتییە، میتـۆدی دژەیەک بەکاردێنێـت بـۆ ئەوەی ئەمە بسـەلمێنێت، واتـا پـێچەوانەکەی گریمـانە دەکـات، وا دادەنێـت کە کۆتـادار (Finite) لە ژمـارەی خۆبەشـمان هەیە. بەم شـێوەیە، گریمـان دەکـات: **کۆمەڵەی ژمارە خۆبەشەکان کۆمەڵەیەکی کۆتادار**

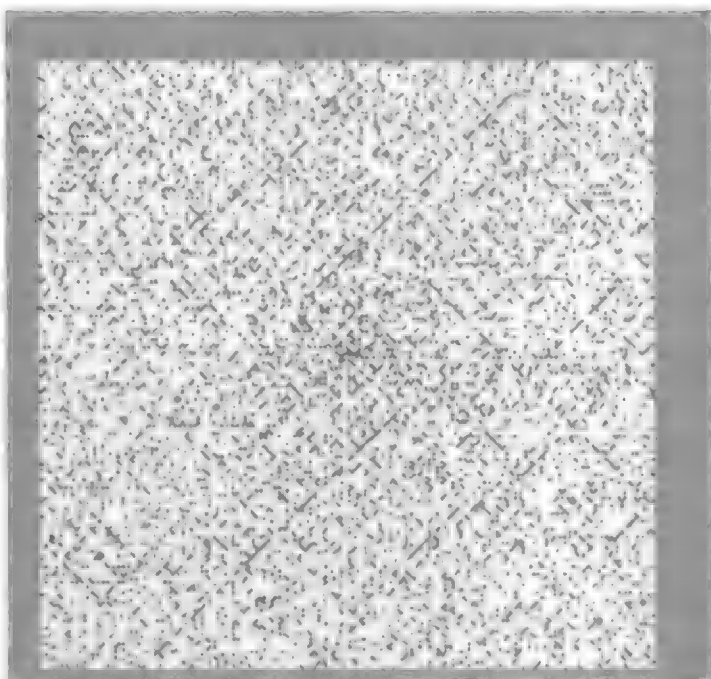
سـەلماندن: وا دادەنێـین کە N ژمـارەی خۆبەشـمان هەیە. لەبەر ئەوەی N کـۆمەڵەیەکی کۆتـادارە لە ژمـارەی خـۆبەش، ئەوە دەتـوانین ژمارەکـانی نـاو N بەو شـێوە ڕیـز بکەیـن: $P_1, \dots, P_N$. ئێسـتا لەو چەنـد ژمـارە خۆبەشـەی هەمـانە، ژمـارەیەکی تـر دروستـدەکەین، نـاوی دەنـێین x ، کە x لە هـیچ یەک لە دانەکـانی نـاو N ناچێـت، واتە لە تەواوی ژمارەکـانی ناو N جیاوازە. دروستکردنی x بەم شێوەیە:

$$x = (p_1 \times p_2 \times \dots \times p_N) + 1$$

واتە هەمـوو خۆبەشـەکان لێکـدەدەین و دواتـر کـۆی 1 دەکەیـن. ئێسـتا دوو ئەگەر هەیە، ئەویش: x خۆبەشە یان خۆبەش نییە؟

1) ئەگەر x خۆبەش بێت، ئەوە دەگەینە دژەیەک، چونکە ئێمە گریمانمان کردووە N کۆمەڵەیەکی کۆتادارە و هەموو ژمارە خۆبەشەکانی تێدایە، کەچی ئێستا x ێکمان دۆزییەوە، کە خۆبەشە و لەو ناو N دا نییە، کە واتە N کۆتادار نییە، ئەمەش واتا N ناکۆتایە، واتا، ناکۆتا ژمارەی خۆبەشمان هەیە.

٢) ئەگەر x خۆبەش نەبێت، واتە x ژمارەیەکی دابەشە، لەبەر ئەوەی هەموو ژمارەیەکی دابەش بە هۆی لێکدانی چەند ژمارەیەکی خۆبەش دەنووسرێت، ئەوە x لە ئەنجامی لێکدانی چەند خۆبەشێک دەنووسرێت. ئەگەر ئێستا x دابەشی هەر یەک لە خۆبەشەکانی ناو N بکەین ئەوە ماوەیەک دەمێنێتەوە، کە ئەویش بریتییە لە 1، ئەمە واتە x دابەشی هیچ یەک لە خۆبەشەکانی ناو N نابێت، وە لەبەر ئەوەی x لە خۆبەشەکانی ناو N دروستکرابوو، کەواتە x تەنیا دابەشی خۆی و 1 دەبێت، ئەمەش واتە x ژمارەیەکی خۆبەشە. دەرکەوت x خۆبەشە ، بە پێی خاڵی یەکەم، کەواتە بۆمان دەردەکەوێت x خۆبەشێکە و لە ناو N نییە، کەواتە ئەو گریمانەی وتمان: کۆتادار ژمارە خۆبەشمان هەیە، هەڵە دەرچوو. کەواتە پێچەوانەکەی راستە، کە ناکۆتا ژمارەی خۆبەشمان هەیە ■



ئەم وێنەی سەرەوە، 400.000 ژمارە دەنوێنێت، کە خالە ڕەشەکان، ئاماژەن **بۆ ژمارە** خۆبەشەکان.

خۆبەشە دووانەکان

Twin primes

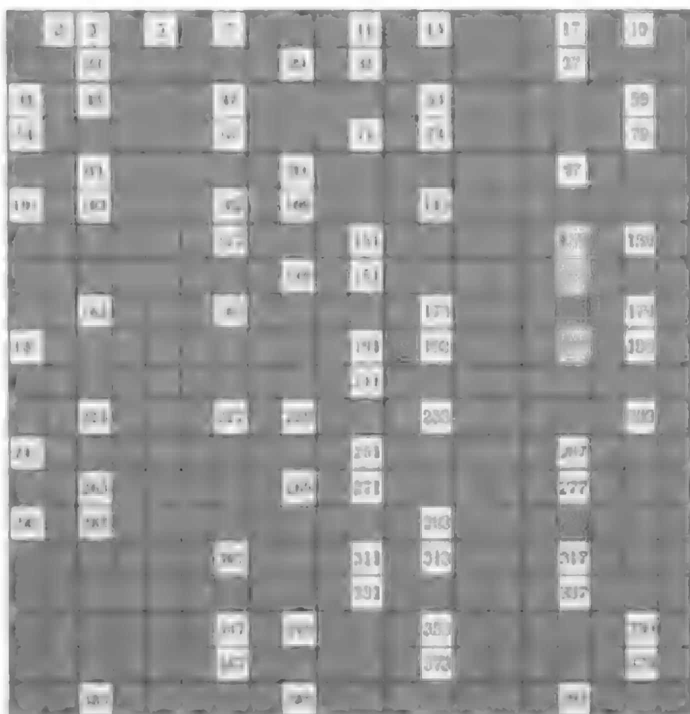
خۆبەشـــە دووانەکـــان، ئەو ژمـــارە خۆبەشـــانەن کە مەودای نێوانیـــان یەکســـــانە. ئەگەر ســــــەرنجی ژمـــــارە خۆبەشـــــەکانی بـــــدەین لە نـــــاو کـــــۆمەڵەی 2،3،5،7،11،13،17،19،23،29،31،37،43،47،53،... ژمـــارە خۆبەشـــەکان 11&13 ، 17&19 ، 29&31، 41&43 ئەمـــانە خۆبەشـــی دووانەن، چـــونکە جیـــاوازی نێوانیـــان بـــریتییە لە 2 یەکە. هەروەهـــا 3،5، &7 ئەمـــانە خۆبەشـــی ســـیانەن. بە شـــێوەیەکی نزیکەیـــی 808،888،577،436 خۆبەشـــــی دووانە هەیە؛ ئەوەی کە تـــــا ئێســـــتا زانراوە، کە ئەم خۆبەشە دوانانەش گشتیان لەخوار نرخی 10^{18} دان.

زۆرێـــک لە بیرکاریزانەکـــان باوەڕیـــان وایە ناکۆتـــا خۆبەشـــی دووانەمـــان هەیە، لەکاتێـــک ئەمە پرســـیارێکە (conjector) شـــیکار نەکـــراوە هەتـــا ئێســـتا. شـــێوەی تـــری دووانەی خـــۆبەش دەکرێـــت دروســـتبکرێت، وەک هەمـانە جـووتە خۆبەشـە ئامۆزاکـان (cousin primes) کە جیـاوازی نێـوان ئەو خۆبەشـانە بـریتییە لە 4. یـان جـووتە خۆبەشـە شەشـییەکان، واتە ئەو خۆبەشانەی جیاوازی نێوانیان بریتییە لە 6 .

لە هەمـــبەر ئەو بیـــرۆکەیە، پرســـیارێک دروســـت دەبێـــت، کە ئەو پرســـیارە تـــا هەنـــووکە بە یەکلانەکـــراوی مـــاوەتەوە، کە پێـــی دەڵـــێن: Polignac's conjecture proposes، ئەم پرســـە دەڵێـــت: بـــۆ هەر

ژمـــارەیەکی جـــووتی (even) سروشـــتی k ، ئەوە ناکۆتـــا جـــووتە (Piar) ژمارە خۆبەش هەیە کە جیاوازی نێوان ئەو خۆبەشانە بریتییە لە k.

واتە، ئەگەر k=10، ئەوە ناکۆتـــا جـــووتە خـــۆبەش هەن کە جیـــاوازی نێوانیان بریتییە لە 10.



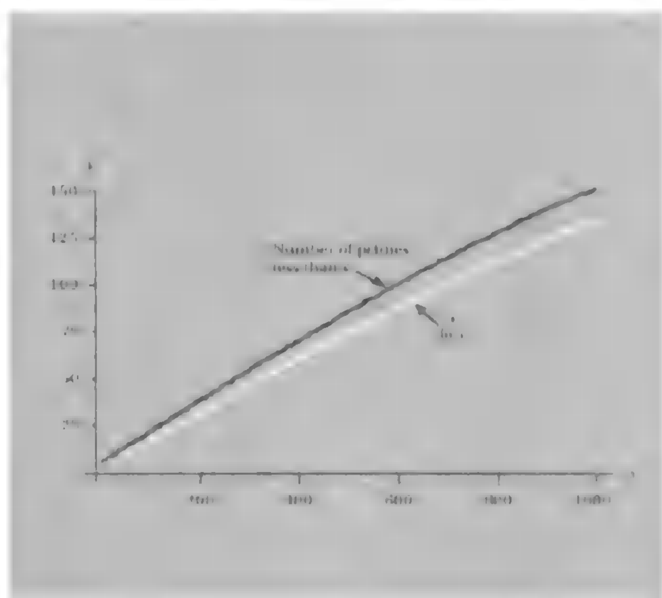
بیردۆزی ژمارە خۆبەشەکان

Prime number theorem

بیـردۆزی ژمـارە خۆبەشـەکان دەکرێـت بیردۆزێکـی هیـوا بەخـش بێـت، لەهەمـان کـات بیردۆزێکـی سـەرنج ڕاکێشیشـە. لە ڕێـگەی ئەم بیـردۆزەوە دەزانـین کە لە خـوار ژمـارەی x چەنـد ژمـارە خـۆبەش هەیە. ئەویـش بەهـۆی ئەم یاسـایەوە $\frac{x}{ln(x)}$ ، واتە ئەگەر بمـانەوێ بـزانین لە خـوار 100 چەنـد ژمارەی خۆبەش هەیە، ئەوە ئەمە شیکار دەکەین: $\frac{100}{ln(100)}$.

به هـۆی خشـتەی ژمـارە خۆبەشـە زانراوەکـان، "کـارل گـاوس" تـوانی تەفسـیری ئەوە بکـات کە چـڕی ژمـارە خۆبەشـەکان بە نزیکەیـی دەکـاتە $\frac{1}{ln(x)}$. ئەمەش واتـای ئەوەیە ئەگەری دۆزینـەوەی خۆبەشـێک، لە مەودایەکـی بچـوک بە پـانی d و لە دەوروبەری x ، بە نزیکەیـی دەکـاتە: $\frac{■}{ln(x)}$. ئەگەر ئەمە ڕاسـت بێـت، ئەوە کـۆی (total) ژمـارە خۆبەشـەکانی بچـوکتر لە x بە نزیکەیـی دەکـاتە تەواوکـاری چـڕییەکەی $\int_2^x \frac{dt}{ln(t)}$، ئەمەش هەر بە نزیکەیی دەکاتەوە: $\frac{x}{ln(x)}$.

ئەم وێنەی خوارەوە ئەوە پیشان دەدات کە هێڵی ژێر $\frac{x}{ln(x)}$ بریتییە لە هۆکاربەندی نزیکەیی هێڵەکەی سەرەوە کە بریتییە لە ژمارەی خۆبەشەکانی خوار x . بەڵام ئەمە ئەوە ئاشکرا دەکات کە ئەنجامی راستەقینە مومکینە بە بەکارهێنانی دەربڕینێک لە بیرکاریدا بزاندرێت، کە پێی دەوترێت نەخشەی زێتا ریمان (Riemann zeta fuction)



نەخشەی زێتا ڕیمان

Riemann zeta function

نەخشەی زێتا ڕیمان ، بریتییە لەو نەخشەیەی کە زۆر بە توندی پەیوەستە بە چۆنییەتی دابەشبوون و بڵاوبوونەوەی ژمارە خۆبەشەکان. ئەم نەخشەیە بریتییە لە زنجیرەیەکی ناکۆتا. وەک لەم شێوەی خوارەوە خراوەتە ڕوو:

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \cdots = \prod_{p\ prime} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right) - 1$$

کاتێک $\prod$ بریتییە لە لێکدانی ڕادە جیاوازەکان. بەهۆی بەکارهێنانی تەکنیکی بەردەوامی شیکاریی (analytic)، ئەوە نەخشەی ζ دەتواندرێت فراوانتربکرێت بۆ نەخشەی شیکارەیی لە ژمارە ئاوێتەکان، $s \neq 1$ لەگەڵ کارکردن و وردبوونەوەی زیاتر، ئەم هاوکێشەی کە لە وێنەکە دراوە بەرهەم دێت. کە ئەمەش پەیوەندییەکەی زۆر تەواوە لە نێوان کۆی لۆگاریتمی سروشتی لە ژمارە خۆبەشەکانی بچوکتر لە x، x خۆشی و x^z کە لەو شوێنەی کە نەخشەی زێتا لە بەهای z دەکاتە سفر. بۆیە ئەگەر زانیمان نەخشەی زێتا لە کوێ ئەنجامەکەی دەبێت سفر ، ئەوە تەواوی ئەوەی دەمانەوێ بەدەستمان دەکەوێت لە مەڕ ژمارە خۆبەشەکانی بچوکتر لە x. لەمەوەش کێشەیەک سەریهەڵدا و تا

هەنــووکەش یەکلانەبــۆتەوە، ئەویــش گریمــانەی ڕیمــانە (Riemann haypothis).

$$\sum_{p \text{ prime},\, m \ge 1,\, p^m \le x} \ln p = x - \sum_{\rho : \zeta(\rho)=0} \frac{x^{\rho}}{\rho} - \frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)}$$

گریمانەی ریمان

Riemann hypothesis

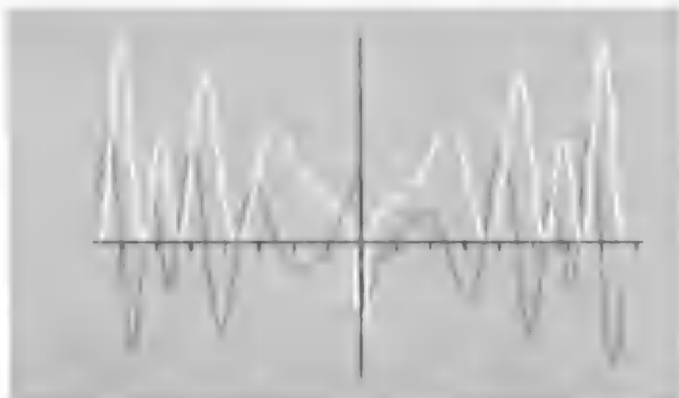
گریمانەی ریمان، بریتییە لە یەکێک لە کێشە کۆنە چارەسەر نەکراوەکانی بیرکاری. گریمانەکە لە لایەن بیرکاریزانی ئەلمانی "ریمان" خۆیەوە ئاراستەکراوە کە هەر لەسەر نەخشەی زێتا ریمانە، کە ئایا ئەم نەخشەیە لە چ نرخێک دەکاتە سفر؟ لەکاتێک لە نەخشەکە چەندین خاڵ-نرخ هەن کە تێدا دەکاتە سفر، کە ریمان خۆی باسی ئەو خاڵانەی کردووە، ئەو سفرەی لەو خاڵانەوە بەدەست دێت، پێیان دەوترێت سفری بێبەر (trivial zeros)، ئەو خاڵانەش بریتیین لە ژمارە جووتە نەرێنییەکان: -6، -4، -2، .... تا بەم شێوە وە بە هەمان شێوە چەند خاڵێکی تر هەن کە تێدا نەخشەکە دیسانەوە تێدا دەکاتە سفر، ئەو خاڵەش ئەو شێوەی هەیە: $\frac{1}{2}+ix$ کاتێک x ژمارەیەکی راستییە و i بریتییە لە ژمارەی ئاوێتە-خەیالی $\sqrt{-1}$، واتە راستەهێڵێکی ستونیمان هەیە کە بەشە راستییەکەی دەکاتە $\frac{1}{2}$ ، کە نەخشەکە لە هەر خاڵێکی سەر ئەو راستە هێڵە دەکاتە سفر، پرسیارەکە ئەوەیە: **ئەگەر نەخشەکە تەنیا لە خاڵەکانی سەر ئەو راستەهێڵە دەکاتە سفر ئەوە بیسەلمێنە، یان هیچ خاڵێکی تر هەیە لە دەرەوەی ئەو راستەهێڵە نەخشەکە تێدا بکاتە سفر؟**

ئەم گریمانەیەی ریمان یەکێکە لەو چەند پرسیارە شیکارنەکراوانەی کە لە لایەن پەیمانگای کلای بیرکاری، خەڵاتی بۆ تەرخانکراوە.

Clay Mathematics Institute Millennium Problems

واتە ئەگەر بتوانی هەر کام لەو پرسانە یەکلابکەیتەوە، ئەوە دەبیتە خاوەنی یەک ملیۆن دۆلاری و چەندین خەلاتی تری جیهانی. بەهەمان شێوە، بیرکاریزان "دەیڤید هیلبێرت" چەندین پرسیاری هەیە کە تا ئێستا شیکاریان بۆ نەدۆزراوەتەوە.

سەبارەت بە سفرەکانی نەخشەی زیتا ریمان ، تا ئێستا 10 ترلیۆن سفر دۆزراوەتەوە لەسەر ئەو راستەهێڵەی لەسەرەوە باسمان کرد، بەلام لەگەڵ ئەوەش ئەم پرسە هەر بە یەکلانەکراوەیی ماوەتەوە، چونکە وتمان بیرکاری لە گشتییەوە بۆ بەش دادەکشێت.



چەماوە سپییەکە بەشی راستی و هێڵە بۆرەکەش بەشی خەیالی دەنوێنن لە نەخشەی ریمان زیتا بۆ $\frac{1}{2} + ix$. نەخشەکە دەبێت بە سفر، کاتێک هەردوو چەماوەکە هاوکات بەیەکەوە سفر بن-تەوەرەی x ببڕن.

سییانەی فیساگۆرسی

Pythagorean triple

سێ ژمارەی تەواوی سروشتی $a،b، \&c$ پێیان دەوترێت "سییانەی فیساگۆرسی" ئەگەر بێت و ئەو سێ ژمارەیە پاسەدانی هاوکێشەی فیساگۆرس بکەن: $a^2 + b^2 = c^2$. بۆ نمونە (3،4،5) سێ ژمارەی فیساگۆرسین - سییانەی فیساگۆرسین، چونکە: $3^2 + 4^2 = 5^2$ کە دەکاتە: $9 + 16 = 25$. ئەمە روونە کە ناکۆتا سییانەی فیساگۆرسمان هەیە، چونکە بە جارانکردنی هەر پێکهاتەیەکی سییانەیەکی فیساگۆرسی بە ژمارەیەک، ئەوە دیسانەوە سییانەی فیساگۆرسی بەرهەمدێت، واتە ئەگەر (3،4،5) هەر یەک لەم ژمارانە جارانی 2 بکەین (6،8،10) ئەوە ئەمانەش دەبنە سیانەی فیساگۆرسی، چونکە $6^2 + 8^2 = 10^2$. سیانەی فیساگۆرسی بەهۆی رێسایەکەوە دەتواندرێت بدۆزرێنەوە ئەویش بەم شێوەیە: دوو ژمارەی سروشتی x و y دەست نیشان دەیکەن بەو مەرجەی $x > y$ دواتر پێکەوەبەستانی ئەو دوو ژمارەیە بەو شێوەی خوارەوە:

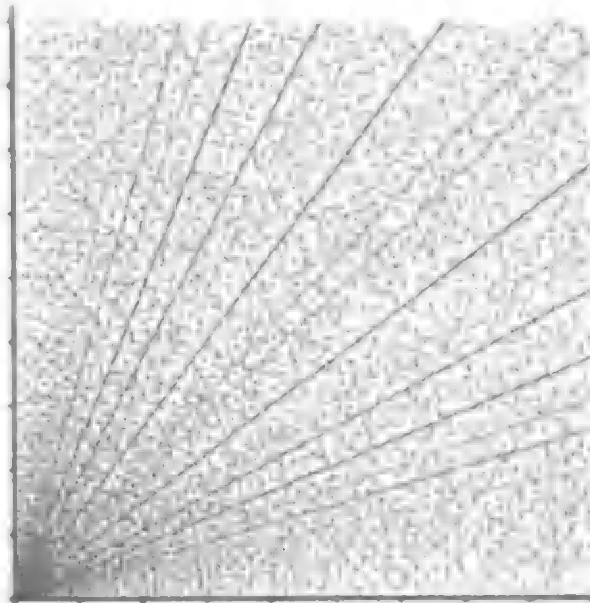
$$a = x^2 - y^2$$

$$b = 2xy$$

پاشان:

$$a^2 + b^2 = (x^2 - y^2)^2 + (2xy)^2 = (x^4 - 2x^2y^2 + y^4) + 4x^2y^2$$
$$= x^4 + 2x^2y^2 + y^4 = (x^2 + y^2)^2$$

بـۆیە، ئەو سـیـیانە بـریتییە لە ($x^2 - y^2$، $2xy$، $x^2 + y^2$). دەبێـت هەمـوو سـیـیانە فیساگۆرسـیـیەکان بتوانـدرێت لەسـەر ئەم شـێـوەیە بنووسرێت.



نواندنی سییانەی فیساگۆرسی بە هێڵکاری.

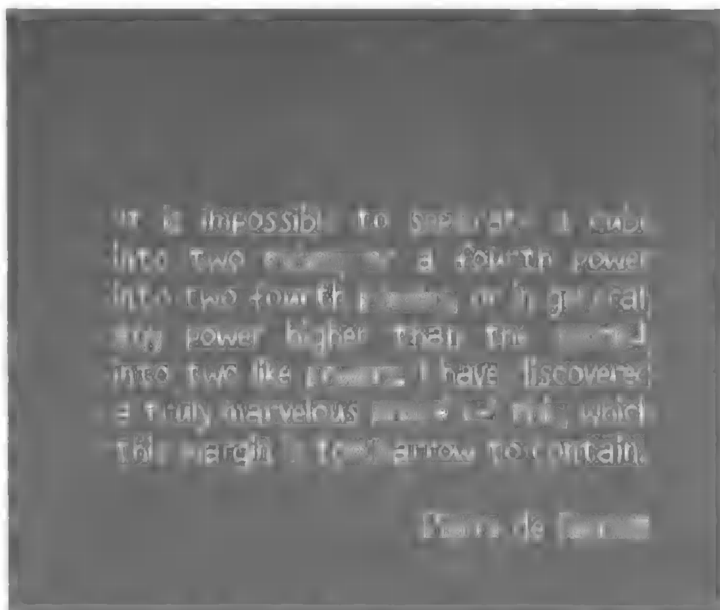
داوین بیردۆزی فیرمات

Fermat's last theorem

دواین بیردۆزی فیرمات، یەکێک بوو لە کێشە کۆنە چارەسەرنەکراوەکانی تیۆری ژمارەکان، بەجۆرێک ئەم کێشەیە نزیکەی 350 ساڵی خایاند تا تواندرا یەکلابکرێتەوە! کێشەکەش لە لایەن ئەندریو وایەڵس (Andrew wiles) لە پەیمانگای نیوتن لە کامبریج لە ساڵی 1995 یەکلاکرایەوە، واتە سەلمێندرا.

دەقی کێشەکەش ئەوەبوو: ئەم هاوکێشەیە: $x^n + y^n = z^n$ کاتێک $n \geq 3$ شیکاری هەیە کاتێک x,y [redacted] z سێ ژمارەی سروشتین؟ "ئەندریو وایەڵس" سەلماندی کە شیکاری نییە! بۆ نمونە ئەگەر سەیر بکەین کاتێک $n = 2$ ، ئەوە دەبێتە یاسای فیسگۆرس، کە لە بابەتی پێشوو بینیمان ناکۆتا سیانەی فیساگۆرسی هەن کە پاسەدانی هاوکێشەکە دەکەن. بەڵام بۆ $n = 3$ ، هیچ سێ ژمارەی سروشتی نادۆزیتەوە کە پاسەدانی ئەم هاوکێشەیە: $x^3 + y^3 = z^3$ بکات! ئەندریو سەلماندنەکەی لەسەر تیۆری بڕگە هێلکەییەکان (Elliptic curves) دارشت.

فیرمات ئەم کێشەی لە پەرتوکەکەیدا ئاماژە پێدا لە ساڵی 1637، کە دەڵێت: میتۆدێکم دۆزیوەتەوە بۆ سەلماندنی ئەم شتە.

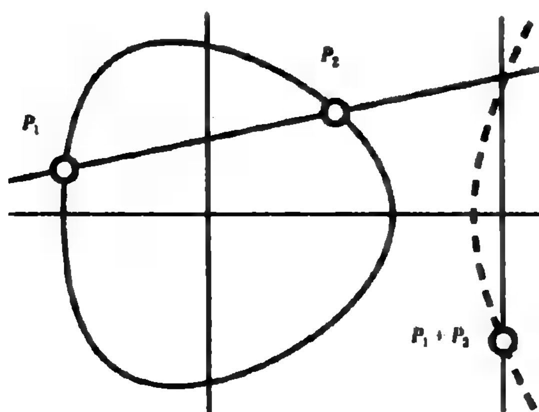


مەحاڵە شەش پاڵوەک جیابکەینەوە بۆ دوو شەش پاڵوی تر، یان بنچینە و هێزکی چواری بۆ دوو 'بنچینە و هێزی چواری'، یان بە شێوەیەکی گشتی، هەر هێزێک گەورەتر لە دوو، جیابکرێتەوە بۆ هێزی هەمان شێوە، بۆیەش سەلماندنێکی ناوازەم لە هەمبەر ئەوە دۆزیوەتەوە، بەڵام ئەم لێوارە (پەراوێزە) تا بڵێی بچوکە-تەسکە بۆ لەخۆگرتنی هەموو ئەمانە. (فێرمات)

خاڵە ڕێژەییەکانی سەر چەماوەیەک

Rational points on a curve

خاڵە ڕێژەییەکان، ژمارەن یان بەهای نەخشەیەکە کە دەتواندرێت بەهۆی ڕێژەی نێوان دوو ژمارەی سروشتی تەفسیر بکرێت و بنووسرێت. ناسینەوەی خاڵە ڕێژەییەکانی سەر چەماوەیەکی ناتەواو (هێلکەیی) پارمەتیدەر بوو بۆ سەلماندنی "دوایین بیردۆزی فیرمات". ئەگەر بێت و هاوکێشەکەی بیردۆزی فیرمات: $a^n + b^n = c^n$ دابەشی c^n بکەین دەگەین: $\left(\frac{a}{c}\right)^n + \left(\frac{b}{c}\right)^n = 1$. ئەگەر شیکارگەلێک بۆ ئەو هاوکێشەیە هەبێت، ئەوە دەبێت ئەو شیکارانە یەکبگرێتەوە-بگونجێت لەگەڵ خاڵەکانی سەر چەماوەکە: $x^n + y^n = 1$ کاتێک x و y ژمارەی ڕێژەین. بۆ چەماوەی: $x^2 + y^2 = 1$ ناکۆتا ژمارە ڕێژەیی بوونی هەیە، بۆیە ئەو هاوکێشەیە: $a^2 + b^2 = c^2$ ناکۆتا شیکاری هەیە، واتە ناکۆتا "سێیانەی فیساگۆرسی" بوونی هەیە. بۆیە ئەگەر n گەورەتر بێت لە 2 یان زیاتر، ئەوە شتەکان ئاڵۆزدەبن. ئەو پەیوەندییەش لە نێوان خاڵە ڕێژەییەکانی سەر چەماوەکان و شیکارە تەواوەکان بۆ هاوکێشەکان، بۆتە هەوڵێکی نزیکتر بۆ لێکۆڵینەوە لە ڕێگەی یەکتربرینی نێوان چەماوە بەردەوامەکان و خاڵە ڕێژەییەکان. بۆ چاماوەیەکی سادە و ساکار، ناکۆتا خاڵی ڕێژەیی هەیە، یان هیچ خاڵێ ڕێژەیی بوونی نییە. چەماوە زۆر ئاڵۆزەکان چەند خاڵێکی ڕێژەییان هەیە.



گرووپێک، کە هەڵگری سیفەتی ئاڵوگۆڕییە دەکرێت پەیوەندی هەبێت بە بڕگەیەکی هێلکەیی (Elliptc curve). ڕاستەهێڵەکەی سەرەوە دوو خاڵی دیار-ئاشکرای لەخۆگرتووە (P_2وP_1) کە چەماوەیەکی بڕیوە لە خاڵێک (خاڵی سێیەم)، وە وێنەدانەوەی ئەو خاڵە بە گوێرەی تەوەرەی x، ئەوە گرووپێکی ئاوێتەی دوو خاڵیمان پێ دەدات، ئەویش: ($P_2 + P_1$).

گریمانەی بریتش-دایر

The Birch and Swinnerton-Dyer conjecture

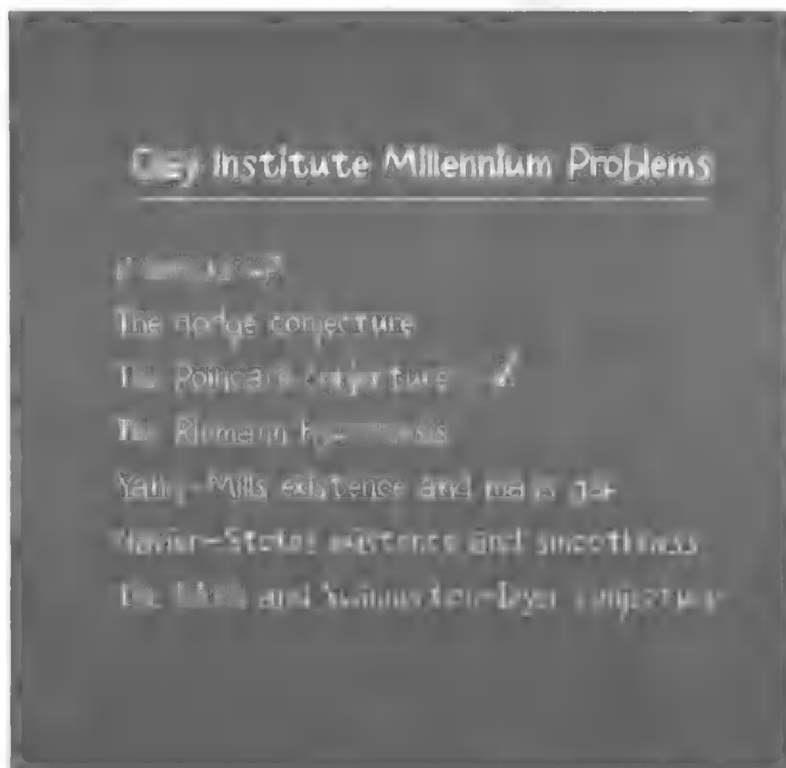
گریمـــانەی بـــریتیش- دایـــر، یەکـــێکە لە کێشـــە چارەســـەرنەکراوەکانی بیرکـــاری، کە یەکـــێکە لەو کێشـــانەی کە خەلاتێکـــی یەک میلـــۆن دینـــاری بـــۆ تەرخـــان کـــراوە لە لایەن پەیمانگـــای کـــلای بیرکـــاری. ئەم کێشـــەیە بە هەمـــان شـــێوەی "نەخشـــەی زیتـــا ڕیمـــان" یە کە لە ژمـــاردنی ژمـــارە خۆبەشـــەکانەوە ســـەرئاوکەوت. ئەم گریمـــانەیە دەڵێـــت: دەبێـــت هەمـــان زنجیـــرە تـــوانی هەبێـــت بـــۆ ژمـــاردنی خـــاڵە ڕێژەییەکـــانی ســـەر چەمـــاوەیەکی هێلکەیـــی (rational points of an elliptic curve). چەمـاوەی هـێلکەیش ئەو چەمـاوەیە کە ئەو شێوەی هەیە:

$$y^2 = x^3Ax + B$$

کاتێـــک $A\&B$ دوو ژمـــارەی تەواون، کە ئەم هاوکێشـــەیە چەمـــاوەکەی دوو بەشـــە یـــان یەک بەشـــە. بە شـــێوەیەکی ورد، بەهـــۆی چەمـــاوەیەکی هێلکەیـــی، "بـــرتیش و دایـــر" چـــۆنییەتی دروســـتکردنی زنجیرەکـــی تـــوانی لەگەڵ کۆلکەکـــانی $\frac{a_n}{n^s}$ پیشـــاندا، وە کاتێـــک s=1 ، گریمـــانەکەی ئەوەیە: دەریـــبخە کەی ناکۆتـــا (Infinite) خـــاڵی ڕێژەیـــی بـــوونی هەیە، وە یـــان کەی کۆتـــادار (Finite) خاڵی ڕێژەیی لەسەر چەماوەی لەم شێوەیە هەیە؟

ئەم کێشـــەیە بە شـــێوە گشـــتییەکی تـــا ئێســـتا یەکلانەبـــۆتەوە، بەلام گریمـــانەکە بـــۆنی ئەوەی لـــێ دێـــت کە ڕاســـت بێـــت بـــۆ هەنـــدێ بـــاری شـــاز.

ئەمەش چەقـــی تێگەیشـــتنە لە نەخشـــەی لەو شـــێوە، کە تـــا چ رادەیەک دەکرێـــت بەکاربهێنـــدرێت بـــۆ دیـــاریکردنی ژمـــارەی تایبەتمەنـــدییەکانی تیۆرییەک.



ئەو چەنـــد پرســـیارەی کە خەڵاتـــی "یەک ملیـــۆن دۆلاری" بـــۆ تەرخـــان کراوە بۆ ئەو کەسەی بتوانێت یەکێک لە مانە یەکلابکاتەوە-شیکاربکات.

گریمانەی گۆڵدباخ[108]

Goldbach Conjecture

گۆڵـدباخ ماتمـاتکزانێکی ئەڵمـانییە کە لە سـاڵی 1690 لە دایـک بـووە و سـاڵی 1764 گیـانی سـپاردووە. گۆڵـدباخ لەهەمـان کاتـدا یاساشـی خوێنـدووە. دوای تەواوکردنـی خوێنـدنی لە زانکـۆی رۆیـال، بـۆ چەنـدێش شـوێنی تـر گەڕاوە، وەک: ئیتاڵیـا، هۆڵەنـدا و فرنسـا، لەم گەڕانەش چـاوی بەچەنـدێن ماتمـاتیکزانی دیـار و بەرزی کەوتـووە، وەک: (لیبینـز-ئـۆیلەر-برنـۆلی) کە تـاوتوێی کارەکـانی خـوێی لەگەڵ ئەمانـدا کـردووە، بـۆیە لەگەڵ ئـۆیلەر بیردۆزێکیـان هەیە پێـی دەڵـێن: Goldbach–Euler theorem. گۆڵـدباخ لە سـاڵی1742 کاغەزێـک بـۆ "ئـۆیلەر" دەنێرێـت و تێـدا باسـی مەسەلەیەک-گریمانە دەکات کە لە خوارەوە وێنەکەی دانراوە.

گریمـانەکە: هەر ژمـارەیەکی جـووتی لە 2 گەورەتـر، دەتوانـدرێت لە ئەنجامی کۆکردنەوەی 2 ژمارەی سەرەتایی (خۆبەش) بنووسرێت.

نمونە: ... $3 + 3 = 6$ ، $3 + 5 = 8$ ، $7 + 3 = 10$ ، $7 + 5 = 12$

زۆرێـک لە ماتماتیکزانـان پێیـان وایە ناتونـدرێت ئەمە بسـەلمێندرێت، واتە سـەلماندنی شـتێکی قورسـە کە ئەمە بـۆ هەمـوو ژمـارەیەکی جـووتی ئەرێنـی راسـتە، بـۆیە لە نێـوان سـاڵەکانی2002 بۆ 2000 یەک میلـۆن

[108] ئەم بابەتە لە پەرتوکەکە باس نەکراوە، بەلام بە پێوستم زانی کە لێرە دایبنێم.

دۆلار وەک خەڵات تەرخانکرا بۆ ئەو کەسەی کە بتوانێت ئەم گریمانەیە یەکلابکاتەوە، بەڵام کەس نەبوو، هەتا هەنووکەش کەس نییە!

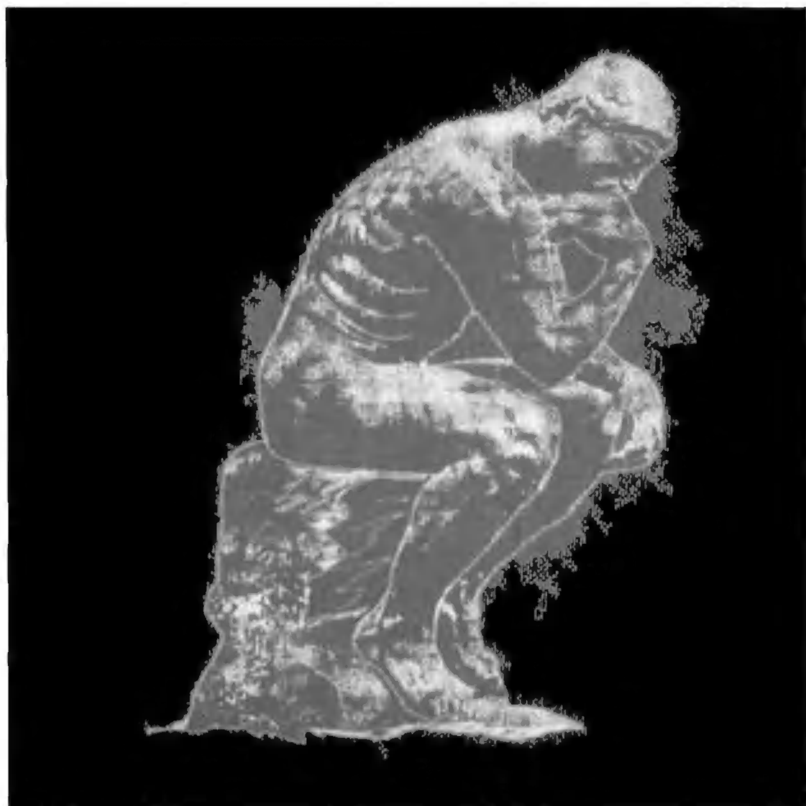
دەقی نامەکەی "گۆلدباخ" بۆ "ئۆیلەر" لە هەمبەر گریمانەکە.

بەرنامەی لاینگلاندس

Langlands program

بەرنـــامەی لاینگلانـــدس، بەرنـــامەیەکە کە ئەو پرســـانەی بە شـــیکار نەکـراوی مـاونەتەوە، هەموویـان لە ژێـر چەترێـک کۆدەکـاتەوە بەو مەرجەی کە پەیوەنـدییەک ئەو پرســانە پـێکەوە ببەسـتێتەوە لە تیـۆری ژمارەکـان و تیـۆری گـرووپ. لەگەڵ یەکخســتنێکی ڕێتێچـوو بـۆ زۆربەی بابەتەکـانی بیرکـاری؛ ئەوانەی کە مـــاوەیەکی زۆرە بیـــری مرۆڤایەتییـــان بەخۆیـــانەوە ســـەرقاڵکردووە بە شـــێوەیەکی جیـــاکراوە. یەکەم هەوڵ بـــۆ ئەم کـــارە لە لایەن بیرکـــاریزانی کەنـــدی ڕۆبێـــرت "لاینگلانـــدس" لە دەوروبەری ســـاڵی 1960 بـوو. گریمانەکـان لەم بەرنـامەیە شـێوەی فەرهەنگێـک وەردەگـرن کە هاوتـا و گونجـاو بێـت، لەگەڵ پێشـنیازکردنی ئەوەی: ئەگەر چەنـد ئەنجامێـک لە تیـۆرییەک ڕاســت بـوو، ئەوە هاوشـێوەی ئەنجـامەکە ڕاسـتە بـۆ ئەو پرسـیارانەی دەکەونە نـاو بەرنـامەکە، ئەمەش لە سـایەی سـێبەری ئەنجـامی ئەو پرسەی کە لە ناو بەرنامەکە یەکلاکراوەتەوە.

ئەم بەرنـــامەیە هەوێنـــی ســـەلماندنی "دوایـــن بیـــردۆزی فێرمـــات"ی دارشـــت بە کـــاریگەیی ئەنجامەکـــانی بەرنـــامەکەی لاینگلانـــدس. لەگەڵ ئەوەشـدا، چـوونە پـێش بەهـۆی بەرنـامەکەی لاینگلاندسـەوە لەمە و هەنـدێ ئاراســتەی تـــر، هێشــتا چەنـــدین کێشـــە هەن هەر بە شـــیکارنەکراوی-یەکلانەکـــراوە مـــاونەتەوە. ســـەرەڕای ئەوەش، بەرنـــامەی لاینگلانـــدس یەکخستێنێکی ناوازەی بیرکاری هاوچەرخە.



ژێدەرەکان:

بۆ وەرگێڕان و دۆزینەوەی واتای بەشێکی زۆری زاراوەکان، سوودم لەم چەند فەرهەنگەی خوارەوە وەرگرتووە:

i. فەرهەنگی خاڵ، کوردی-کوردی، شێخ محەمەدی خاڵ، چاپی دووەم، 2015.

ii. فەرهەنگی بیرکاری، ئینگلیزی-عربی-کوردی، نەوزاد عمر محیدین، 2013.

iii. فەرهەنگی فیزیا، ئینگلیزی-عربی-کوردی، نەوزاد عمر محیدین، 2013.

iv. فەرهەنگی ئۆکسفۆرد، ئینگلیزی-کوردی، زانەر محمد، 2011.

v. فەرهەنگی تەکنۆلۆژیای زانیاری، ئینگلیزی-کوردی، زانستپەروەرانی کورد، وەشانی دووەم، 2011.

vi. پێناسە و ڕاڤەی زاراوەکانی کۆمپیوتەر، ئاراس نوری ئەحمەد، 2012.

vii. فەرهەنگی ئاناهیتا، کوردی-کوردی. (http://ferheng.info)

viii. فەرهەنگی بیرکاری، ئینگلیزی-ئینگلیزی، چاپکراوی زانکۆی Oxford. Oxford concise dictionary of mathematics. Oxford university press.

دەربارەی وەرگێڕ و ئامادەکار:

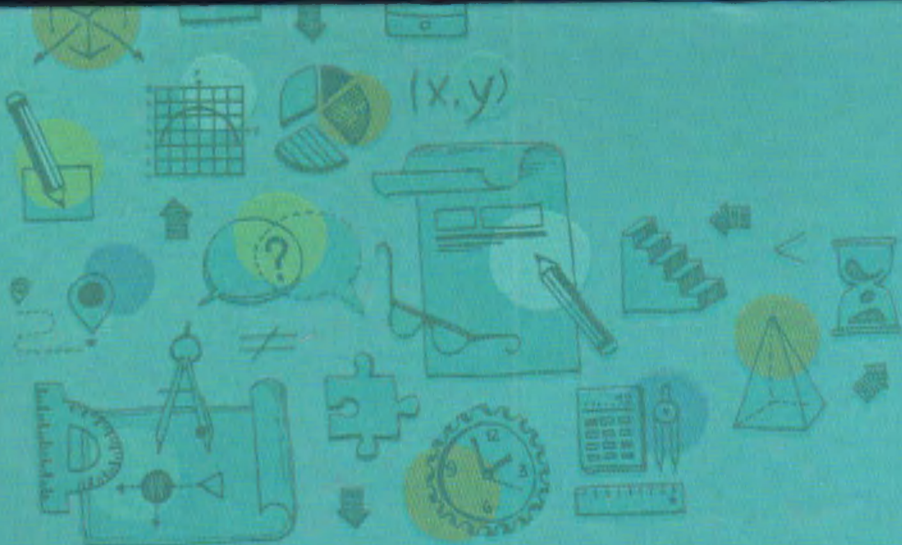
(ئوسامە تحسین پیربال) بەکالۆریۆس لە پەروەردەی بیرکاری بە پلەی یەکەم (ئاستی زۆر باشە)، ساڵی 2018، زانکۆی سەلاحەدین-کۆلێژی پەروەردە.

خاوەنی بلۆگی بیرکاری بۆ کورد. نووسین و وەرگێڕانی چەندەها بابەت سەبارەت بە بیرکاری و پەروەردەی بیرکاری.

دەمەزرێنەری "یانەی بیرکاری" لە زانکۆی سەلاحەدین، کۆلێژی پەروەردە، بەشی بیرکاری، ساڵی 2016 - 2018 .

بەشداریکردن لە "هەشتەمین کۆنفراسنی زانستی" کۆلێژی پەروەردە، بۆ توێژینەوەکانی قوتابیانی قۆناغی چوارەمی کۆلێژ. (2018)

بەشداریکردن لە "کۆنفرانستی بیرکاری، بیرکاری پەتی و پەروەردەی بیرکاری" زانکۆی تیشک. (2017)



پەرتوکی "بیرکاری لە چەند خولەکێک" یەکێک بوو لەو پەرتوکانەی کە زۆر بە وردی خوێندمەوە و زۆر سەرنجی ڕاکێشام، پەرتوکێکە، کە ئەتوانم بڵێم؛ نزیکەی 70 لە سەدی مەعەریفەی بیرکاری لە خۆگرتووە، وەک نووسەریش خۆی باسی ئەکات. لەگەڵ ئەمەش، پەرتوکەکە جگە لەوەی ئاشنات دەکات بە هەندێ بابەت و چەمکی زۆر گرنگ، کێشە بیرکارییە شیکارنەکراوەکانیشت پێ دەناسێنێت.





07501264689
07811408868

hakem142[illegible]@yahoo.com
[illegible]2009@yahoo.com

سلێمانی - بازاڕی ئاوباریك- نهۆمی یەکەم
بەرامبەر کاسۆمۆل - دوکانی ژمارە (٦٦)



٨٠٠٠ هەزار دینار


ISBN: 978-9922-626-07-9
9 789922 626079